LEÇON N° 54 :

Croissance comparée des fonctions réelles $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto x^a$ et $x \longmapsto \ln x$.

Pré-requis :
- *Fonctions citées dans le titre : définition, sens de variations, limites en $\pm\infty$;*
- *Droite réelle achevée, voisinage épointé d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, noté $\mathscr{V}(x_0)$;*
- *Opérations élémentaires sur les limites, théorème d'encadrement, ainsi que le théorème de composition des limites : « Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, où $D, E \subset \mathbb{R}$ tels que $f(D) \subset E$. Soient $(a, \ell, L) \in \overline{D} \times \overline{\mathbb{R}}^2$, où $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ et $L = \lim_{x\to \ell} g(x)$. Alors $L = \lim_{x\to a} g \circ f(x)$. »*

Dans toute la leçon, x_0 désigne un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

0 La relation de prépondérance

Définition 1 : Soient f, g deux fonctions ne s'annulant pas sur $\mathscr{V}(x_0)$. On dit que *f est négligeable devant g (au voisinage de x_0)* si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On utilisera la notation de Landau : $f = o(g)$ (ou $f \overset{x_0}{=} o(g)$ s'il y a confusion).

Proposition 1 :
- **La relation o est transitive ;**
- **Soient f, g deux fonctions ne s'annulant pas sur $\mathscr{V}(x_0)$. Alors la relation P définie par $f\ P\ g \Leftrightarrow \big((f = g$ ou $f = o(g)\big)$ est une relation d'ordre.**

démonstration :
- *Soient f, g, h trois fonctions ne s'annulant pas sur $\mathscr{V}(x_0)$ telles que $f = o(g)$ et $g = o(h)$. On utilise la définition :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\right) \left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}\right) = 0,$$

donc $f = o(h)$.

- *Puisque $f = f$, on a directement $f\ P\ f$ et P est réflexive. La transitivité découle du premier point. Il ne reste donc plus qu'à montrer l'antisymétrie. Supposons que $f\ P\ g$ et $g\ P\ f$ pour deux fonctions f et g ne s'annulant pas sur $\mathscr{V}(x_0)$. Si $f = o(g)$ et $g = o(f)$, alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

ce qui est absurde puisque l'un des deux quotients devrait tendre vers $\pm\infty$. Nécessairement, $f = g$. Ceci achève la démonstration de cette proposition. ■

Remarque 1 : Puisque la relation o est transitive, on utilisera par commodité la notation de Hardy : $f = o(g) \Leftrightarrow f \ll g$ (ou $f \overset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow f \overset{x_0}{\ll} g$ s'il y a confusion). Cela nous permettra notamment d'écrire plus intuitivement que $f \ll g \ll h$. Dans la suite, on se permettra même d'écrire par abus de langage $f(x) \ll g(x)$ pour dire que $f \ll g$.

54.1 Croissance comparée entre une fonction puissance et ln

Théorème 1 : Pour tout réel a strictement positif,

$$\ln x \overset{+\infty}{\ll} x^a.$$

démonstration *: Soit a un réel strictement positif.*

$$\begin{aligned} \forall\, u > 1, \quad 0 \leqslant \ln u < u \quad &\Rightarrow \quad \forall\, x > 1, \quad 0 \leqslant \ln(x^{a/2}) < x^{a/2} \\ &\Rightarrow \quad \forall\, x > 1, \quad 0 \leqslant \frac{a}{2} \ln x < x^{a/2} \\ &\Rightarrow \quad \forall\, x > 1, \quad 0 \leqslant x^{-a} \ln x < \frac{2}{a} x^{-a/2}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{a} x^{-\frac{a}{2}} = 0$; donc le théorème d'encadrement permet de conclure. ■

Remarque 2 : Si a est négatif, alors on a $x^a \ll \ln x$ au voisinage de $+\infty$ (le quotient n'est alors pas une forme indéterminée !).

Corollaire 1 : Pour tout couple $(b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $(\ln x)^c \overset{+\infty}{\ll} x^b$.

démonstration *: Le résultat est immédiat si $c \leqslant 0$. Supposons alors $c > 0$. On a ainsi*

$$\frac{(\ln x)^c}{x^b} = \left(\frac{\ln x}{x^{b/c}}\right)^c.$$

Puisque b/c est un réel strictement positif, le théorème 1 nous assure que le quotient entre parenthèses tend vers 0 en l'infini. Par application de la fonction continue $X \longmapsto X^b$, on en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^c}{x^b} = 0,$$

d'où le résultat. ■

54.2 Croissance comparée entre une fonction puissance et exp

Théorème 2 : Pour tout réel a,

$$x^a \overset{+\infty}{\ll} e^x.$$

démonstration *: Soit a un réel quelconque. Alors*

$$\frac{x^a}{e^x} = e^{a\ln x - x} = e^{x\left(a\frac{\ln x}{x} - 1\right)}.$$

Le théorème 1 et celui de composition des limites permettent alors de conclure. ■

Corollaire 2 : Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $x^b \overset{+\infty}{\ll} e^{ax}$.

démonstration *: Le résultat est immédiat si $b \leqslant 0$. Supposons alors $b > 0$. On a ainsi*

$$\frac{x^b}{e^{ax}} = \left(\frac{x^{b/a}}{e^x}\right)^a.$$

Puisque b/a est un réel, le théorème 2 nous assure que le quotient entre parenthèses tend vers 0 en l'infini. Par application de la fonction continue $X \longmapsto X^a$, on en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{b/a}}{e^x}\right)^a = 0,$$

d'où le résultat. ■

Récapitulons ce que l'on a démontré jusqu'à présent :

$$\forall\ (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \quad (\ln x)^c \ll x^b \ll e^{ax}.$$

`Remarque 3` : Posons $f_{a,b,c}(x) = e^{ax}\, x^b\, (\ln x)^c$ pour des réels a,b,c quelconques. Définissons aussi la relation L d'ordre lexicographique pour deux triplets (a,b,c) et (a',b',c') de $\mathbb{R}^3$:

$$(a,b,c)\ L\ (a',b',c') \Leftrightarrow (a < a') \text{ ou } (a = a' \text{ et } b < b') \text{ ou } (a = a', b = b' \text{ et } c < c').$$

Il est alors facile de voir que

$$\forall\ (a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{R}^3, \quad f_{a,b,c}\ P\ f_{a',b',c'} \Leftrightarrow (a,b,c)\ L\ (a',b',c'),$$

de sorte que la relation P sur l'ensemble de fonctions $\{x \longmapsto e^{ax}\, x^b\, (\ln x)^c,\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$ est une relation d'ordre total.

54.3 Applications

54.3.1 Branches infinies

Fonction	Limite calculée	Branche parabolique de direction	Asymptote
ln	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	(Ox) en $+\infty$	$-$
exp	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	(Oy) en $+\infty$	$-$
$x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{x} = 0$	(Ox) en $+\infty$	$-$
$x \mapsto x+1+2\,e^{-x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1+2\,e^{-x}}{x} = 0$	(Ox) en $-\infty$	$y = x+1$ en $+\infty$

54.3.2 Calcul de limites

Exercice 1 : Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

Solution : On a

$$\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \left(\frac{x^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}\right)^x = e^{x\left(\ln\left(x^{\frac{\ln x}{x}}\right) - \ln\ln x\right)} = e^{x\left(\ln\left(e^{\frac{\ln^2 x}{x}}\right) - \ln\ln x\right)}.$$

Par le théorème 1 et le théorème de composition des limites, on en déduit que la limite du quotient ci-dessus vaut 0 en $+\infty$. $\diamondsuit$

Exercice 2 : Étudier la dérivabilité en 0 et 1 de la fonction définie sur $[0,1]$ suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Solution : f est clairement continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, avec pour tout $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x}(\ln x)^{-2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

On en déduit donc les limites

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0,$$

de sorte que f est dérivable en 1, mais pas en 0. $\diamondsuit$

Exercice 3 : On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+nx}\mathrm{d}x.$$

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Solution : On a

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^{n-1} \quad & \Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+nx}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+nx}\mathrm{d}x \\ & \Rightarrow \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{1}{n^2}\ln(1+nx)\right]_0^1 \\ & \Rightarrow \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(1+n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

On conclut alors par le théorème d'encadrement. ♢

54.3.3 La fonction Gamma d'Euler...

Exercice 4 : Considérons les intégrales suivantes, dépendant d'un paramètre $x > 0$:

$$\varphi(h) = \int_1^h t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \psi(k) = \int_k^1 t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ et ψ admettent des limites finies respectivement en $+\infty$ et 0.

Solution : Attaquons tout d'abord la première fonction. Pour tout réel $x > 0$ fixé, on a $t^{x-1}\,e^{-t} \overset{\infty}{\ll} t^{-2}$ car $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ par le théorème 2. On en déduit l'existence d'un réel $A > 1$ tel que pour tout $h > A$, $\int_A^h t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^h \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, et donc

$$\int_A^h t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{A} - \frac{1}{h} \leqslant \frac{1}{A}.$$

La fonction φ est donc uniformément bornée en tant que somme d'une quantité bornée et d'un réel fixe ($\int_1^A$), pour tout $h > A$, donc admet une limite finie quand $h \to \infty$.

Passons maintenant à la seconde fonction. Pour tout réel $x > 0$ fixé, on a $t^{x-1}\,e^{-t} \overset{0}{\ll} t^{-2}$ car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ (pas de forme indéterminée). On en déduit l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k < \varepsilon$, $\int_k^\varepsilon t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^\varepsilon \frac{\mathrm{d}t}{t}$, et donc

$$\int_k^\varepsilon t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Pour la même raison que précédemment, la fonction ψ admet une limite finie lorsque $k \to 0$. ♢

`Remarque 5` : On vient de montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente pour tout réel x, ce qui définit la « fonction gamma d'Euler », notée $\Gamma(x)$.

54.4 Représentation graphique