LEÇON N° 17 :

Équations du second degré à coefficients réels ou complexes.

Pré-requis :
- *Nombres complexes : définition et propriétés ;*
- *Notions d'anneaux, de corps ;*
- (*Théorème de Liouville*).

17.1 Équations du second degré à coefficients réels

Définition 1 :
- ◇ **Une *équation du second degré à coefficients réels* est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Dans la suite, cette équation sera notée (E).**
- ◇ **Le *discriminant* de l'équation ci-dessus est le nombre noté Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.**

Théorème 1 (résolution de l'équation dans $\mathbb{R}$) : Afin de résoudre l'équation du second degré à coefficients réels (E)[a], trois cas sont à distinguer :

(i) Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 distinctes, données par les formules :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) possède une solution double :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

(iii) Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet aucune solution réelle.

[a] : Pour toute solution $\tilde{x}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on dira aussi que $\tilde{x}$ est une racine de $ax^2 + bx + c$.

démonstration : *Notons $f(x) = ax^2 + bx + c$. Puisque $a \neq 0$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

(i) Supposons que $\Delta > 0$. Alors $\sqrt{\Delta}$ existe, et

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Puisqu'un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on en déduit que

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) Supposons que $\Delta = 0$. Alors

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

entraîne directement la solution double $x = \dfrac{-b}{2a}$.

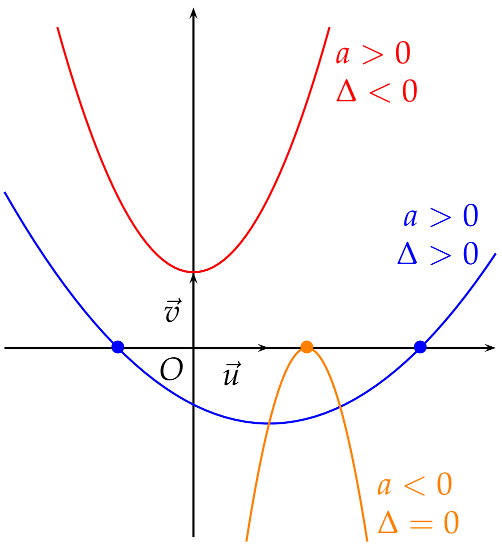
(iii) Supposons $\Delta < 0$. Dans ce cas,

$$f(x) = a\Bigg(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{>0} \underbrace{- \frac{\Delta}{4a^2} \quad \begin{matrix}(\to < 0)\\(\to > 0)\end{matrix}}_{>0}\Bigg) \quad > \quad 0.$$

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle. ■

17.1.1 Interprétation géométrique

Soit $\mathscr{P}$ la plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



Si le coefficient a de x^2 est strictement positif, (resp. strictement négatif), alors les branches de la paraboles sont orientées vers le haut (resp. le bas).

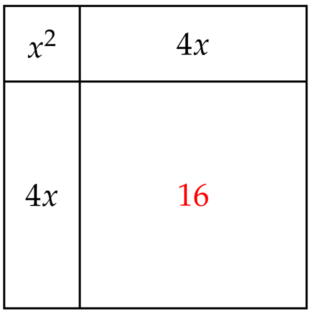
Si le discriminant Δ est strictement positif, on observe bien que la représentation graphique de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts : ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Si $\Delta = 0$, on n'observe qu'un seul point d'intersection.

Enfin, si $\Delta < 0$, la courbe ne vient même pas toucher l'axe des abscisses.

17.1.2 Une résolution géométrique

On souhaite résoudre l'équation $x^2 + 8x - 9 = 0$. On la note d'abord $x^2 + 8x = 9$, de sorte à considérer x^2 comme l'aire d'un carré de côté x et $8x$ comme l'aire de deux rectangles identiques de longueur x et de largeur 4. On place ces trois éléments dans la figures ci-dessous :



On constate alors qu'en « complétant » la figure de sorte à obtenir un grand carré d'aire $9 + 16 = 25$, on doit ajouter un carré de côté 4. Notre équation de départ devient donc $x^2 + 8x + 16 = 25 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 25$. On trouve ainsi $x = 1$ comme solution. L'algèbre donne aussi $x = -9$ comme solution, mais cela ne correspond pas à une longueur, et c'est bien la limite des résolutions géométriques : elles contraignent à n'utiliser que des nombres positifs.

17.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Lemme : Si $Z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions opposées dans $\mathbb{C}$.

démonstration : *Cherchons s'il existe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$. On a les équivalences :*

$$\Big((x+iy)^2 = a + ib\Big) \overset{\text{prop 2(i)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \pm\text{signe}(b)\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \end{cases}$$

avec $\text{signe}(b) = \begin{cases} 1 & si \quad b > 0 \\ 0 & si \quad b = 0 \\ -1 & si \quad b < 0 \end{cases}$ *. Le résultat s'en déduit alors.* ■

Théorème 2 : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$, notée (E') dans la suite, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$, données par :

(i) Si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est tel que $\delta^2 = \Delta$.

démonstration :

$$\begin{aligned}
(E') &\Leftrightarrow a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right).
\end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$, alors $\delta = 0$ et $z_1 = z_2 = \frac{b}{2a}$. Sinon, le lemme assure que δ tel que $\delta^2 = \Delta$ existe, et dès lors, on a :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

■

Théorème 3 (fondamental de l'algèbre, ou de d'Alembert) : Toute fonction polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leurs multiplicités).

démonstration : *On rappelle le théorème de Liouville et le vocabulaire qui va avec :*

<u>Théorème de Liouville</u> : Toute fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique et bornée est constante.
(voir "http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Liouville_(variable_complexe)" pour une démonstration)
<u>Analytique</u> : $\forall z_0 \in \mathbb{C}, f(z) = \sum a_k (z-z_0)^k$.
<u>Bornée</u> : $\exists M > 0 \mid |f(z)| < M \; (\forall z)$.

Montrons que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une racine. Supposons pour cela que P n'admette aucun racines et considérons la fonction $f = 1/P$. f est analytique et clairement bornée car $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0 \Rightarrow f$ est constante. On note alors $f(z) = C$, ce qui implique $P \equiv \frac{1}{C} \longrightarrow$ absurde, car $\deg(P) \geqslant 1$. D'où P admet au moins une racine z_0. Par suite, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(z) = (z-z_0)\,Q(z)$, et on réitère ce raisonnement au polynôme Q vérifiant $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Au final, P admet n racines (avec éventuellement égalité de plusieurs d'entre elles). ■

17.3 Relations entre coefficients et racines

Proposition 1 : Si z_1 et z_2 désignent les deux solutions (éventuellement confondues) de (E'), alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

démonstration *: On part de l'expression des deux solutions (sans oublier la possibilité que $\Delta = 0$, auquel cas $z_1 = z_2$). Pour la somme, on a donc*

$$z_1 + z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} + \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-b-\delta-b+\delta}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Pour le produit, on a :

$$z_1 z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\,\frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(-b-\delta)(-b+\delta)}{(2a)^2} = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

■

Remarques :
- Cette proposition est évidemment valable pour (E), à condition que les deux solutions (éventuellement confondues) existent.
- Si on a malheureusement oublié la formule donnant le discriminant, cette proposition permet de trouver les solutions x_1 et x_2 (si elles existent) en fonction de a, b et c en résovant un système de deux équations à deux inconnues.

Exercice : Soient a et b deux nombres réels vérifiant l'inégalité $|b| \leqslant 2|a|$. Montrer que l'équation $ax^2 + bx + a = 0$ possède deux solutions conjuguées.

<u>**Solution**</u> : Le calcul du discriminant donne $\Delta = b^2 - 4a^2 = -1(4a^2 - b^2) = i^2\,(4a^2 - b^2)$. Notons que $|b| \leqslant 2|a| \Leftrightarrow b^2 \leqslant 4a^2 \Leftrightarrow 4a^2 - b^2 > 0$, nous permettant ainsi d'écrire que $\Delta = \left(i\sqrt{4a^2-b^2}\right)^2$. D'après le théorème 2, les deux solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4a^2-b^2}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_1 = \frac{-b - i\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}.$$

Ces deux solutions sont effectivement conjuguées. ◇

Exercice : Trouver une équation du second degré à coefficients complexes $ax^2 + bx + c = 0$ dont les solutions sont $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

<u>**Solution**</u> : On peut supposer que $a = 1$ (car la division des deux membres de (E') par $a \neq 0$ ne change pas les solutions de l'équation). Il suffit alors, grâce à la proposition 1, de résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 = -b \\ z_1 z_2 = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -b = (1+i) + (1+2i) \\ c = (1+i)(1+2i) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2-3i \\ c = 1 + 3i + 2i^2 = -1 + 3i. \end{array}\right.$$

Une équation admettant z_1 et z_2 comme solutions est donc $z^2 - (2+3i)z - (1-3i) = 0$. ◇