LEÇON N° 66 :

Théorème de Rolle. Applications.

Pré-requis :
- *Notions de limite, continuité, dérivabilité ;*
- *Théorème des valeurs intermédiaires ;*
- *L'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Dans cette leçon, on considère deux réels a, b tels que $a < b$.

66.1 Théorème de Rolle

Théorème 1 : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

démonstration : *Puisque f est continue, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Si $m = M$, f est constante et f' est identiquement nulle sur $]a, b[$. Supposons alors $m < M$ quitte à échanger les rôles de m et M. Alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$.*

- *Si $m < f(a)$, alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f(c) = m$.*

$$\forall\, x \in\ ]a, c[, \quad f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$
$$\forall\, x \in\ ]c, b[, \quad f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

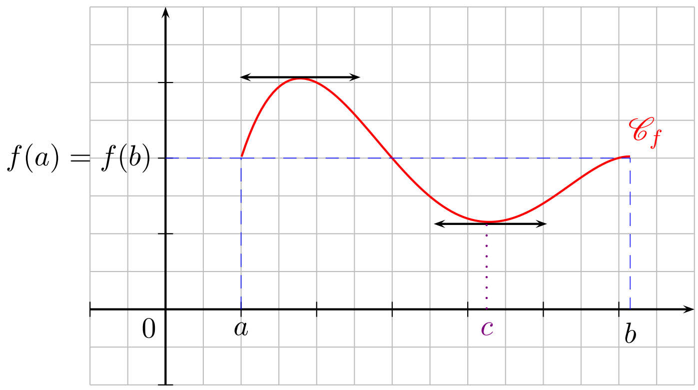
  Comme f est dérivable en c, le passage à la limite dans les deux inégalités ci-dessus donne respectivement

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0,$$

  d'où, par continuité de f en c, $f'(c) = 0$.
- *si $f(a) < M$, un raisonnement analogue donne le même résultat : $f'(c) = 0$.*

Le théorème est ainsi démontré. ■

Interprétation géométrique



`Remarques 1:`

1. On ne sait pas si c est unique, et le théorème ne permet pas de connaître c.
2. f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle.
   Exemple : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$. On a $f(-1) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$, mais aussi $\lim\limits_{x\to\pm1} f'(x) = +\infty$.
3. f continue sur $[a, b]$ est une condition nécessaire.
   Exemple : $f(x) = x - E(x)$ sur $[0, 1]$ (E désigne la fonction "partie entière"). On a $f(0) = f(1) = 0$, mais $f'(x) = 1$ sur $]0, 1[$.
4. f dérivable sur $]a, b[$ est une condition nécessaire.
   Exemple : $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. On a $f(-1) = f(1) = 1$, mais $f'(x) = \pm 1$ sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$.
5. f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi une condition nécessaire. En effet, si l'on considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{2i\pi x}$, bien continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, on aura $f(0) = f(1) = 1$, mais $f'(x) = 2i\pi\, e^{2i\pi x}$ implique que $|f'(x)| = 2\pi \neq 0$.

66.2 Conséquences

66.2.1 Théorème de Rolle infini

Théorème 2 : Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Alors il existe un réel $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

démonstration : *Si f est constante sur $[a, +\infty[$, alors f' et identiquement nulle sur cet intervalle. Sinon, il existe un réel $b \in]a, +\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) \overset{TVI}{\Rightarrow} \exists\ A \in]b, +\infty[\ |\ f(A) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

De plus, ce même Théorème des Valeurs Intermédiaires nous assure que

$$\exists\ B \in]a, b[\ |\ f(B) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

On en déduit que $f(B) = f(A)$. Puisque f reste continue et dérivable sur $[B, A]$, le théorème de Rolle s'applique et l'existence de $c \in]B, A[\subset]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ est démontrée. ∎

66.2.2 Théorème des accroissements finis (TAF)

Théorème 3 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

démonstration : *Soient A un réel et la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - A(x-a). \end{array}$$

φ est clairement continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et vérifie $\varphi(a) = 0$. Déterminons alors A tel que $\varphi(b) = 0$:

$$\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Affectons alors cette valeur à A (existe car l'hypothèse générale $a < b$ assure que $a - b \neq 0$), de sorte que le théorème de Rolle s'applique, donnant l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - A = 0 \Leftrightarrow f'(c) = A \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

■

66.3 Autres applications

66.3.1 Sens de variations d'une fonction

Théorème 4 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors

(i) f est croissante sur $[a,b] \Leftrightarrow \forall\ x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$;

(ii) f est décroissante sur $[a,b] \Leftrightarrow \forall\ x \in]a,b[,\ f'(x) \leqslant 0$;

(iii) f est constante sur $[a,b] \Leftrightarrow \forall\ x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$.

démonstration : *Nous ne traiterons que le premier cas ici.*

"$\Rightarrow$" : *Supposons f croissante sur $[a,b]$, et soit $c \in]a,b[$. Alors*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Dans ce cas,

$$\left. \begin{array}{l} \text{– Si } x < c, \text{ alors } f(x) \leqslant f(c) \\ \text{– Si } x > c, \text{ alors } f(x) \geqslant f(c) \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \Rightarrow f'(c) \geqslant 0.$$

"$\Leftarrow$" : *Supposons que $f'(c) \geqslant 0$ pour tout $c \in]a,b[$. Onconsidère $(x,y) \in [a,b]^2$ tel que $x < y$ (sinon on échange les rôles de x et y). Alors, grâce au TAF, il existe $c_1 \in]x,y[\subset]a,b[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c_1)(y-x)$. Puisque $f'(c_1) \geqslant 0$ par hypothèse, il vient que $f(y) - f(x)$ et $y - x$ ont le même signe, c'est-à-dire que f est croissante sur $[a,b]$.*

■

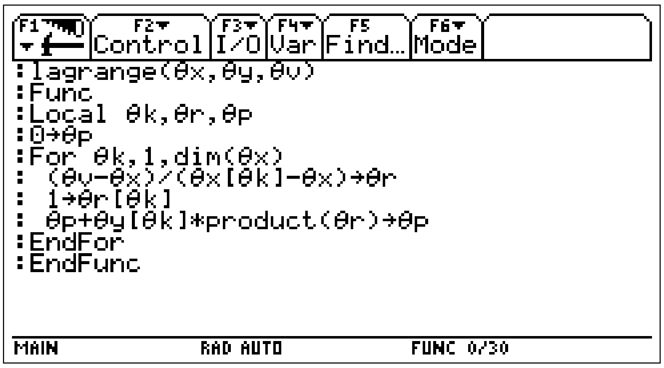
66.3.2 Localisation des zéros

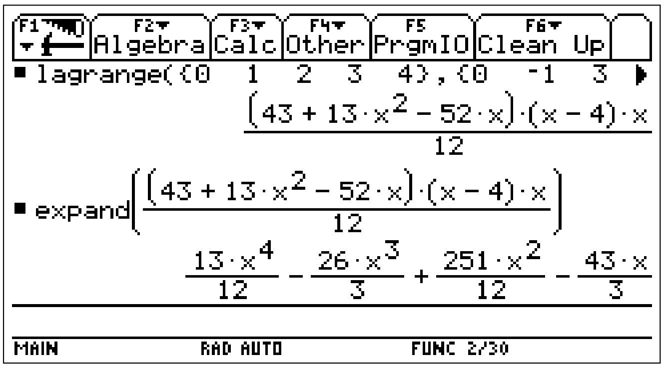
Théorème 5 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et admettant $n > 1$ zéros sur $[a,b]$ notés $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors f' admet au moins $(n-1)$ zéros.

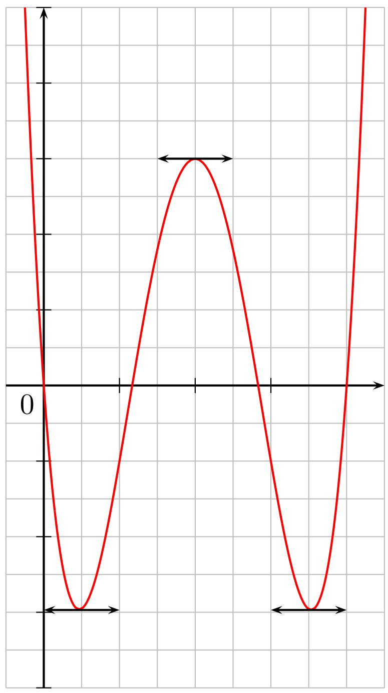
démonstration *: Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle sur chacun des $(n-1)$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.* ■

Interprétation graphique

Pour illustrer ce théorème, j'ai voulu créer un polynôme de degré 4 passant par les points $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,3)$, $(3,-1)$ et $(4,0)$. Me rappelant de l'interpolation de Lagrange, j'ai implanté une fonction dans la calculatrice me permettant de déterminer un tel polynôme. Je l'ai ensuite représenté sur l'intervalle $[-0,5; 4,5]$ afin de montrer que sa dérivée possède effectivement trois racines. La fonction prend en paramètre 2 listes (celle des abscisses et celle des ordonnées) et une variable (celle qui sera utilisée pour expliciter le polynôme d'interpolation).







66.3.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 6 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant n$) sur $[a,b]$ et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}.$$

démonstration *: Soit A un réel. On applique le théorème de Rolle à la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \psi : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-x)^k + A(b-x)^{n+1} \end{array}$$

après avoir vérifié qu'elle était bien continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et déterminé la valeur de A telle que $\psi(a) = \psi(b)$. ■

66.3.4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 7 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in]a,b[$, alors

$$|f(b) - f(a)| < k|b-a|.$$

démonstration *: D'après le TAF,*

$$\begin{array}{rl} & \exists\, c \in]a,b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \\ \Rightarrow & \exists\, c \in]a,b[\mid |f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b-a| \\ \Rightarrow & |f(b) - f(a)| < k|b-a|. \end{array}$$

■