LEÇON N° 19 :

Étude de la fonction $z \longmapsto \frac{z-a}{z-b}$ où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

Pré-requis :
- *Transformations du plan : expression complexe, propriétés ;*
- *Nombres complexes : propriétés, module, argument ;*
- *Théorème de l'arc capable.*

On se place dans le pan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

19.1 Etude de la fonction f

19.1.1 Domaine de définition, bijectivité

Théorème 1 : f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{b\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, sa réciproque est :

$$f^{-1} : z \longmapsto \frac{bz-a}{z-1}.$$

démonstration : *f est clairement définie sur $\mathbb{C}\backslash\{b\}$. Si $a = b$, on a $f(z) = 1$ pour tout complexe z. On suppose donc dans la suite que $a \neq b$. Soit alors $z \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$.*

$$\begin{aligned} f(z) = z' \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-a}{z-b} = z' \Leftrightarrow z - a = z'z - z'b \\ &\Leftrightarrow \quad z(1-z') = -z'b + a \Leftrightarrow z = \frac{z'b-a}{z'-1} \quad (z' \neq 1). \end{aligned}$$

■

19.1.2 Construction de $M' = f(M)$

Proposition 1 : Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}.$$

démonstration : *On note* a, b, c, a', b', c' *les affixes respectives de* A, B, C, A', B', C' *dans le plan complexe. On a alors :*

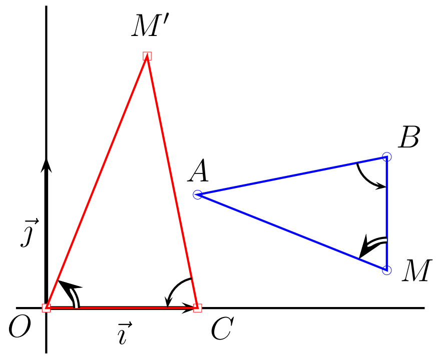
$$\begin{aligned}
& \text{\textit{Deux triangles} } ABC \text{ \textit{et} } A'B'C' \text{\textit{sont semblables}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ \textit{et} } (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}\\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \left|\frac{c'-a'}{b'-a'}\right| \text{ \textit{et} } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{c'-a'}{b'-a'}\right) \pmod{2\pi}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'},
\end{aligned}$$

car ces deux nombres complexes ont même module et même argument. ■

Si M, M', A, B, C sont cinq points d'affixes respectives $z, z', a, b, 1$, alors :

$$z' = f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'-0}{1-0} = \frac{z-a}{z-b} \Leftrightarrow \frac{z-a}{z-b} = \frac{0-z'}{0-1}.$$

D'après la proposition précédente, on sait alors que les triangles MBA et OCM' sont semblables, ce qui permet donc la construction du point M' :



19.1.3 Décomposition de f

Remarquons que

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b} = 1 + \frac{b-a}{z-b} = 1 + (b-a)\overline{\left(\frac{1}{\overline{z-b}}\right)}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2 : f se décompose en $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, où :

- * $f_1 : z \longmapsto z - b$ **est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ d'affixe $-b$;**
- * $f_2 : z \longmapsto \frac{1}{\overline{z}}$ **est l'inversion de pôle O et de rapport 1 (voir définition ci-dessous) ;**
- * $f_3 : z \longmapsto \overline{z}$ **est la réflexion par rapport à l'axe des réels ;**
- * $f_4 : z \longmapsto (b-a)z$ **est la similitude de rapport $|b-a|$ et d'angle $\arg(b-a)$;**
- * $f_5 : z \longmapsto 1 + z$ **est la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ d'affixe 1.**

Définition 1 : On appelle *inversion de pôle* Ω *et de puissance* k, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}\backslash\{\Omega\} & \longrightarrow & \mathscr{P}\backslash\{\Omega\} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \right.$$

telle que Ω, M, M' soient alignés et $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = k$.

En langage complexe, voyons ce que cela donne :

$$\begin{array}{rcl} \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{\Omega M'} & = & \lambda \overrightarrow{\Omega M} \qquad (1) \\ \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = k & \Rightarrow & \lambda = \dfrac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2} \end{array}$$

La relation (1) donne donc

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\frac{\overrightarrow{\Omega M}}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2} \quad \Leftrightarrow \quad z' - \omega = k\frac{z-\omega}{(z-\omega)(\overline{z-\omega})} = \frac{k}{\overline{z-\omega}} \quad \Leftrightarrow \quad z' = \omega + \frac{k}{\overline{z-\omega}}.$$

Proposition 2 :

(a) Pour toute droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$, il existe un couple $(\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$M(z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow z\overline{\omega} + \overline{z}\omega + \rho = 0\ ;$$

(b) Réciproquement, pour tout couple $(\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{M(z) \in \mathscr{P} \mid z\overline{\omega} + \overline{z}\omega + \rho = 0\}$$

est une droite de vecteur normal $\vec{n}(\omega)$;

(c) Pour tout cercle $\mathscr{C} \in \mathscr{P}$ de centre Ω et de rayon $r > 0$, il existe $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que

$$M(z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow z\,\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega + k = 0\ ;$$

(d) Réciproquement, pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, on a

$$\{M(z) \in \mathscr{P} \mid z\,\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega + k = 0\} = \left\{ \begin{array}{lll} \varnothing & \text{si} & |\omega|^2 < k, \\ \{\Omega(\omega)\} & \text{si} & |\omega|^2 = k, \\ \mathscr{C}(\Omega, \sqrt{|\omega|^2 - k}) & \text{si} & |\omega|^2 > k, \end{array} \right.$$

où $\mathscr{C}(\Omega, \sqrt{|\omega|^2 - k})$ désigne le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon $\sqrt{|\omega|^2 - k}$.

démonstration :

(a) Considérons une droite $\mathscr{D}$ du plan, d'équation $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont trois réels tels que a et b soient non nuls. Posons $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$. Alors

$$\begin{array}{rcl} M(z) \in \mathscr{D} & \Leftrightarrow & ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \Re e(\overline{\omega} z) + c = 0 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2}(\overline{\omega} z + \omega\overline{z}) + c = 0 \Leftrightarrow \overline{\omega} z + \omega \overline{z} + 2c = 0. \end{array}$$

Il suffit alors de poser $\rho = 2c \in \mathbb{R}$ *pour arriver au résultat.*

(b) *Réciproquement, et avec les mêmes notations que précédemment,*

$$\begin{aligned} \{M(z) \in \mathscr{P} \mid \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho = 0\} &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid 2\Re e(\overline{\omega}z) + \rho = 0\} \\ &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid 2(ax+by) + \rho = 0\} \\ &= \left\{M(z) \in \mathscr{P} \mid ax+by+\frac{\rho}{2} = 0\right\}, \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à l'équation d'une droite dont le vecteur normal admet pour coordonnées (a, b)*, donc d'affixe* ω.

(c) *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* $\Omega(\omega)$ *(on pose* $\omega = a + ib$*) et de rayon* $r > 0$*. Alors*

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow |z-\omega|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2 \Leftrightarrow (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \omega\overline{\omega} = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \underbrace{a^2+b^2-r^2}_{\in\mathbb{R}} = 0. \end{aligned}$$

En posant $k = a^2 + b^2 - r^2$*, on arrive bien au résultat attendu.*

(d) *Réciproquement, en posant* $z = x + iy$ *et* $\omega = a + ib$*, on a*

$$\begin{aligned} z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(ax+by) + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = |\omega|^2 - k. \end{aligned}$$

Il y a alors trois cas à distinguer :
- *si* $|\omega|^2 < k$*, alors il n'y a pas de solution, et l'ensemble cherché est vide.*
- *si* $|\omega|^2 = k$*, alors* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$*, donc* $(a, b) = (0, 0)$ *et l'ensemble cherché est le point* Ω.
- *si* $|\omega|^2 > k$*, alors en posant* $r^2 = |\omega|^2 - k$*, on trouve l'équation d'un cercle de centre* $\Omega(\omega)$ *et de rayon* r.

■

Proposition 3 : Soit φ_2 une inversion de pôle O et de puissance 1 (φ_2 est l'application de $\mathscr{P}$ associée à f_2). L'application φ_2 transforme :

(i) une droite passant par O privée de O en la même droite ;

(ii) une droite ne passant pas par O en un cercle passant par O privé de O ;

(iii) un cercle de centre O de rayon $r > 0$ en un cercle de rayon $1/r$ de centre O ;

(iv) un cercle passant par O privé de O en une droite ne passant pas par O ;

(v) un cercle ne passant pas par O en un cercle ne passant pas par O.

démonstration : *Dans toute cette démonstration, on notera* $\cdot^*$ *l'ensemble* $\cdot$ *privé de l'origine* O.

(i) *Une droite* $\mathscr{D}$ *passant par O signifie qu'elle est d'équation complexe* $z\overline{\omega} + \overline{z}\omega = 0$. *Le fait qu'elle soit privée de O signifie simplement que* $z \neq 0$. *Alors :*

$$\begin{aligned} \varphi_2(\mathscr{D}^*) : \frac{1}{\overline{z}}\overline{\omega} + \frac{1}{z}\omega = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z\overline{\omega}}{\overline{z}z} + \frac{\omega\overline{z}}{\overline{z}z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z\overline{\omega} + \overline{z}\omega = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\varphi_2(\mathscr{D}^*)$ *et* $\mathscr{D}^*$ *ont la même équation, ces deux objets sont les mêmes.*

(ii) *On procède selon le même raisonnement que précédemment :*

$$\begin{aligned} &\mathscr{D} : \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho = 0 \quad (\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^* \\ \Rightarrow \quad &\forall\, z \neq 0, \quad \varphi_2(\mathscr{D}) : \frac{1}{\overline{z}}\overline{\omega} + \frac{1}{z}\omega + \rho = 0 \\ \Rightarrow \quad &\forall\, z \neq 0, \quad \varphi_2(\mathscr{D}) : \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + \rho z\overline{z} = 0 \\ \Rightarrow \quad &\forall\, z \neq 0, \quad \varphi_2(\mathscr{D}) : z\overline{z} - \left(-\frac{\omega}{\rho}\right)\overline{z} - \left(-\frac{\overline{\omega}}{\rho}\right)z = 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation d'un cercle passant par O, privé de O (car $z \neq 0$*).*

(iii) *Le cercle* $\mathscr{C}$ *de centre O et de rayon* $r > 0$ *admet pour équation complexe* $z\overline{z} + r^2 = 0$. *Alors, pour tout* $z \neq 0$,

$$\varphi_2(\mathscr{C}) : \frac{1}{z\overline{z}} + r^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + r^2 z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = 0.$$

$\varphi_2(\mathscr{C})$ *est donc un cercle de centre O et de rayon* $1/r$.

(iv) *Le cercle* $\mathscr{C}$ *de centre O et de rayon* $r > 0$ *admet pour équation complexe* $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = 0$. *Alors, pour tout* $z \neq 0$,

$$\varphi_2(\mathscr{C}^*) : \frac{1}{z\overline{z}} - \frac{\overline{\omega}}{\overline{z}} - \frac{\omega}{z} = 0 \Leftrightarrow 1 - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\overline{\omega} + \overline{z}\omega - 1 = 0.$$

$\varphi_2(\mathscr{C}^*)$ *est une droite ne passant pas par O.*

(v) *Le cercle* $\mathscr{C}$ *de centre O et de rayon* $r > 0$ *admet pour équation complexe* $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0$, *où* $(\omega, k) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ *tel que* $|\omega^2| \geqslant k$. *Alors, pour tout* $z \neq 0$,

$$\varphi_2(\mathscr{C}^*) : \frac{1}{z\overline{z}} - \frac{\overline{\omega}}{\overline{z}} - \frac{\omega}{z} + k = 0 \Leftrightarrow 1 - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + kz\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} - \left(\frac{\overline{\omega}}{k}\right)z - \frac{\omega}{k}\overline{z} + 1 = 0.$$

$\varphi_2(\mathscr{C}^*)$ *est donc un cercle ne passant pas par* 0.

■

Puisque les translations, réflexions et similitudes conservent les droites et les cercles, l'application φ (application de $\mathscr{P}$ associée à f) transforme les droite et cercle en droite ou cercle, à l'image de la proposition précédente. On obtient donc le théorème suivant, que l'on ne démontrera pas :

Théorème 3 : Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et de rayon $r > 0$. Alors

(i) Si $B \in \mathscr{D}$, alors $\varphi(\mathscr{D}\backslash\{B\})$ est une droite passant par C, privée de C ;

(ii) Si $B \notin \mathscr{D}$, alors $\varphi(\mathscr{D})$ est un cercle passant par C, privé de C ;

(iii) Si $I = B$, alors $\varphi(\mathscr{C})$ est le cercle de centre C de rayon $\frac{1}{r}|b-a|$;

(iv) Si $B \in \mathscr{C}$, alors $\varphi(\mathscr{C}\backslash\{B\})$ est une droite ne passant pas par C ;

(v) Si $B \notin \mathscr{C}$, alors $\varphi(\mathscr{C})$ est un cercle ne passant pas par C.

19.2 Lignes de niveaux

19.2.1 Pour le module

On note $\Gamma_k = \{M \in \mathscr{P}\backslash\{B\} \mid |f(z)| = k\} = \left\{M \in \mathscr{P}\backslash\{B\} \mid \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k\right\}$.

Proposition 4 : Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

(a) si $k < 0$, alors $\Gamma_k = \varnothing$;

(b) si $k = 0$, alors $\Gamma_k = \{A\}$;

(c) si $k = 1$, alors Γ_k est la médiatrice du segment $[AB]$;

(d) sinon, Γ_k est le cercle de diamètre $[IJ]$, où

$$I = \mathrm{bar}\{(A,1),(B,k)\} \quad \text{et} \quad J = \mathrm{bar}\{(A,1),(B,-k)\}.$$

démonstration :

(a) Trivial, car un module est toujours positif.

(b) $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 0 \Rightarrow |z-a| = 0 \Leftrightarrow \Gamma_k = \{A\}$.

(c) $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1 \Rightarrow |z-a| = |z-b| \Leftrightarrow MA = MB$*, d'où le résultat.*

(d) $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k \Rightarrow MA^2 = k^2MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$,
donc $[MI] \perp [MJ]$ *et* Γ_k *est le cercle de diamètre* $[IJ]$.

■

`Remarque 1` : Pour la construction de I, J et de Γ_k associé, on donne ce qui suit :
Soit $C \in \mathscr{P}\backslash(AB)$ tel que $\dfrac{CA}{CB} = k$, alors I (resp. J) est le pied de la bissectrice intérieure (resp. extérieure) à $\widehat{ACB}$.

19.2.2 Pour l'argument

Proposition 5 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$\Gamma_\theta = \left\{ M(z) \in \mathscr{P} \backslash \{A, B\} \mid \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \theta \pmod{\pi} \right\}$$

et

$$\Gamma'_\theta = \left\{ M(z) \in \mathscr{P} \backslash \{A, B\} \mid \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \theta \pmod{2\pi} \right\}.$$

On distingue alors plusieurs cas :

(i) Si $\theta = 0 \pmod{\pi}$, alors $\Gamma_\theta = (AB) \backslash \{A, B\}$;

(ii) Si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, alors $\Gamma'_\theta = (AB) \backslash [AB]$;

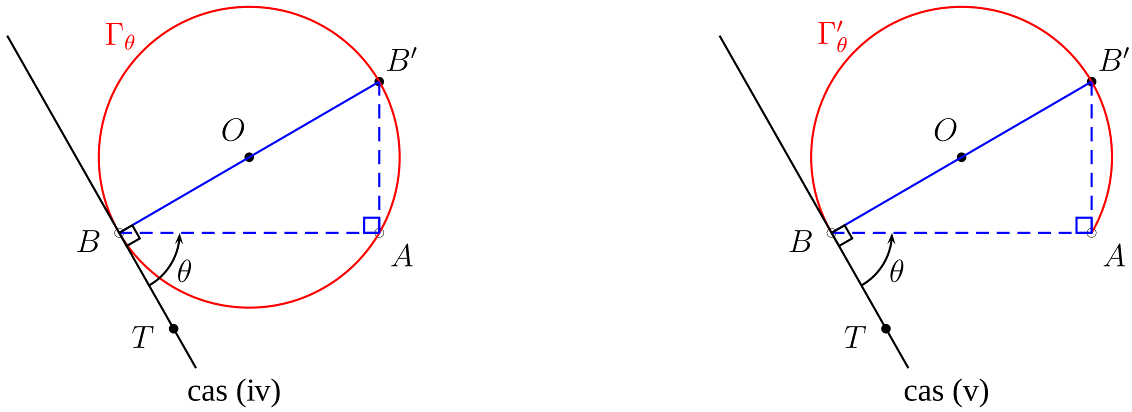
(iii) Si $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, alors $\Gamma'_\theta =]AB[$;

Si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, alors on définit un point $T \in \mathscr{P} \backslash \{B\}$ tel que $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}) = \theta \pmod{2\pi}$. Alors

(iv) $\Gamma_\theta = \mathscr{C} \backslash \{A, B\}$, où $\mathscr{C}$ est le cercle passant par A et B, tangent à (BT) en B ;

(v) Γ'_θ est l'arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$ délimité par le demi-plan de frontière (AB) et ne contenant pas T.

Voici les figures illustrant les cas (iv) et (v) :



démonstration : *Notons que* $\arg(\frac{z-a}{z-b}) = \arg(z-a) - \arg(z-b) = (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) - (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi}$.

(i) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \pmod{\pi}$, *donc* $M \in (AB) \backslash \{A, B\}$.

(ii) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \pmod{2\pi}$, *donc* $M \in (AB) \backslash [AB]$.

(iii) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \pi \pmod{2\pi}$, *donc* $M \in]AB[$.

(iv) Soit B' le point diamétralement opposé à B sur $\mathscr{C}$. Alors $B'BT$ est un triangle rectangle en B, ainsi que $B'AB$ en A. Alors

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \textit{et} \quad (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'A}) = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \theta) = \theta \pmod{\pi}.$$

Donc d'après le théorème de l'arc capable, $M \in \mathscr{C} \backslash \{A, B\}$.

(v) *Même démonstration que précédemment, en remarquant que les mesures principales sont de même signe dans le même demi-plan.*

■

19.3 Applications

19.3.1 Colinéarité et orthogonalité

Théorème 4 : Soient A, B et $M \neq B$ trois points de $\mathscr{P}$. Les droites (AM) et (BM) sont parallèles (resp. perpendiculaires) si et seulement si

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \qquad \text{(resp. } \in i\mathbb{R}\text{).}$$

démonstration : *On suppose les trois points distincts, sinon le résultat est évident. On a alors*

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow M \in (AB)\backslash\{A, B\},$$

d'où A, B et M sont alignés, ou les droites (AM) et (BM) sont parallèles. De plus,

$$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont bien orthogonaux. ■

19.3.2 Critère de cocyclicité

Théorème 5 : Quatre points distincts A, B, C, D d'afixes respectives a, b, c, d sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

démonstration : *Notons tout d'abord que $\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d}$ est appelé* bi-rapport *du quadruplet (A, B, C, D), et est noté $[A, B, C, D]$. On a donc*

$$\begin{aligned}
[A, B, C, D] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \pmod{\pi} \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} \\
&\Leftrightarrow A, B, C, D \text{ cocylciques (d'après le théorème de l'arc capable) ou alignés.}
\end{aligned}$$

■