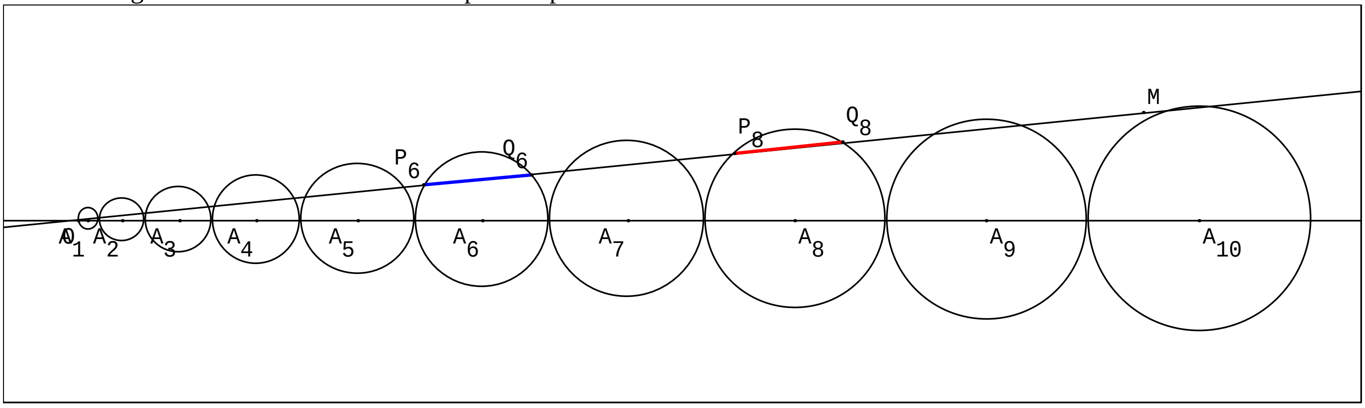
PROBLÈME LIANT LE THÉORÈME DE PYTHAGORE À UNE AUTRE CONFIGURATION QU'UN TRIANGLE RECTANGLE

Voici une figure dont la construction est explicitée plus bas :



Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (O est le centre du premier cercle A_1) un repère orthonormé, $N \in \mathbb{N}^*$ fixé (ici, $N = 10$), $I = \{1, \ldots, N\}$ et $I^* = \{1, \ldots, N-1\}$. Pour tout entier $i \in I$, on définit une suite (C_i) de cercles par : C_i est de centre A_i de coordonnées $(i^2, 0)$, et de rayon i (de sorte que chaque cercle soit tangent au précédent).

Soit d la droite de coefficient directeur positif, tangente à C_N. Pour tout $i \in I^*$, cette droite d coupe chaque cercle C_i en deux points notés respectivement P_i et Q_i (ici, on a placé P_6, Q_6, P_8 et Q_8) On note S_i la longueur du segment $[P_iQ_i]$, I_i le milieu du même segment, et M l'intersection de d et C_N.

Le but de cet exercice est de déterminer, dans de telles conditions (en particulier que la droite d est tangente au dernier cercle), quels sont les cas où il existe deux entiers a et b de I^* tels que $S_a = S_b$.

Une fois la solution trouvée, nous énoncerons correctement le théorème en résultant !!

La solution se trouve dans les pages qui suivent. Essayez quand même de trouver avant d'aller voir plus loin !!!

Solution (mieux vaut avoir la figure sous les yeux...)

Détermination que S_i pour tout $i \in I$

Soit $i \in$ I. P_i et Q_i étant sur le même cercle de centre A_i, le triangle $P_iA_iQ_i$ est isocèle en A_i. A_i se trouve donc sur la médiatrice de $[P_iQ_i]$. Or I_i en est le milieu, donc $[I_iA_i]$ est une hauteur de ce triangle, en particulier, $(I_iA_i) \perp (P_iQ_i) = d$. On remarque aussi que $(MA_N) \perp d$ puisque d est tangente en M au cercle de centre A_N. Par conséquent, $(I_iA_i) // (MA_N)$. Les droites d et $(OA_i) = (OA_N)$ étant sécantes en O, on peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{OA_i}{I_iA_i} = \frac{OA_N}{MA_N} \Leftrightarrow I_iA_i = \frac{OA_i \times MA_N}{OA_N} = \frac{i^2 \times N}{N^2} = \frac{i^2}{N}.$$

Puisque $[I_iA_i]$ est une hauteur du triangle $P_iA_iQ_i$, le triangle $P_iI_iA_i$ est rectangle en I_i. On peut alors appliquer le théorème de Pythagore dans ce dernier triangle, ce qui nous donne :

$$P_iA_i^2 = P_iI_i^2 + I_iA_i^2 \Leftrightarrow P_iI_i = \sqrt{i^2 - \left(\frac{i^2}{N}\right)^2} = \frac{i}{N}\sqrt{N^2 - i^2}.$$
$$\Rightarrow S_i = 2\,P_iI_i = \frac{2i}{N}\sqrt{N^2 - i^2}.$$

Résolution de l'équation $S_a = S_b$

Pour deux entiers distincts a et b ($a, b \in I^*$), on a alors la suite d'équivalences suivantes (le cas $a = b$ n'est évidemment pas intéressant…) :

$$\begin{aligned}
& S_a = S_b \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2a}{N}\sqrt{N^2 - a^2} = \frac{2b}{N}\sqrt{N^2 - b^2} \\
\Leftrightarrow\ & a^2\,(N^2 - a^2) = b^2\,(N^2 - b^2) \\
\Leftrightarrow\ & N^2\,(a^2 - b^2) = a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\
\Leftrightarrow\ & N^2 = a^2 + b^2. && \text{(simplification possible, car } a \neq b\text{)}
\end{aligned}$$

Finalement, deux segments S_a et S_b sont de même longueur dans la construction précédente si et seulement si on a l'égalité d'entiers $N^2 = a^2 + b^2$. a et b donnent alors les positions de ces deux segments (c'est-à-dire les segments sont construits respectivement sur les cercles C_a et C_b).

Cette égalité ne vous rappelle-t-elle rien ????

Exemples (toujours en considérant la même construction) :

- Si la droite d est tangente au 5ème cercle, alors les segments S_3 et S_4 sont égaux (car $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$) ;
- Si la droite d est tangente au 10ème cercle, alors les segments S_6 et S_8 sont égaux (car $6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$) ;
- Quelle est la mesure de S_{168} sachant que $S_{49} = 94{,}08$?

  On a $168^2 + 49^2 = 28224 + 2401 = 30625$. Or $\sqrt{30625} = 175$ est un entier. Par conséquent, dans la configuration où l'on aurait 175 cercles, cette propriété nous permet d'affirmer que les segments S_{49} et S_{168} sont égaux, d'où $S_{168} = 94{,}08$.

  Vous pensez que cette solution convient ?? **NON**, car il faut encore vérifier que la configuration à 175 cercles donne bien $S_{49} = 94{,}08$!!! Or nous savons que

  $$S_i = 2\,P_iI_i = \frac{2i}{N}\sqrt{N^2 - i^2},$$

  donc $S_{49} = \frac{98}{175}\sqrt{175^2 - 49^2} = \frac{98}{175} \times 168 = 98 \times \frac{24}{25} = 98 \times 0{,}96 = 94{,}08$. Ouf...

Regarder enfin la page suivante qui donne le théorème résumant ce petit “délire” :

Théorème

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, $I = \{1, \ldots, N\}$ et $I^* = \{1, \ldots, N - 1\}$. Pour tout entier $i \in I$, on définit le cercle C_i est de centre A_i de coordonnées $(i^2, 0)$, et de rayon i (de sorte que chaque cercle soit tangent au précédent).

Soit encore d la droite de coefficient directeur positif, tangente à C_N. Pour tout $i \in I^*$, cette droite d coupe chaque cercle C_i en deux points notés respectivement P_i et Q_i. On note S_i la longueur du segment $[P_iQ_i]$, I_i son milieu, et M l'intersection de d et C_N. Soient enfin a et b deux entiers distincts de I^*.

Alors :

$$S_a = S_b \iff N^2 = a^2 + b^2.$$