

Notations

- ◇ Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . L'ensemble des suites d'éléments de \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{K} sera noté plus simplement (a_n) . On note (0) la suite constante dont tous les termes sont nuls et on rappelle que deux suites (a_n) et (b_n) sont égales si et seulement si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k = b_k$.
- ◇ Soient (a_n) et (b_n) deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit leur somme $(a_n) + (b_n)$, leur produit $(a_n) \times (b_n)$ et le produit d'une suite par un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ respectivement par :

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

$$(a_n) \times (b_n) = (c_n) \text{ où, pour tout entier } n \in \mathbb{N} : c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\lambda \cdot (a_n) = (\lambda a_n)$$

- ◇ On admet que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif d'élément nul (0) .
- ◇ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on notera X^p la suite $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_p = 1 \\ x_n = 0 \quad \text{si } n \neq p \end{cases}$$

On écrira aussi X^0 et X^1 respectivement 1 et X .

- ◇ Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie I : série génératrice d'une suite (a_n)

1) Propriétés algébriques

- 1.a) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif dont on précisera l'élément neutre.
- 1.b) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est intègre. (Indication : si (a_n) est un élément non nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pourra considérer le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$.)
- 1.c) Montrer qu'un élément (a_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est inversible dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.
- 1.d) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Les résultats précédents montrent que toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ peut s'écrire formellement sous la forme $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Lorsqu'on note $A(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ou $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, alors $A(X)$ ou A sera appelée série génératrice de la suite (a_n) . On remarque que par définition du produit des suites on a $X^p \times X^q = X^{p+q}$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. D'autre part, si A est une série génératrice, pour tout entier $k \geq 2$, A^k désigne le produit $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ facteurs}}$.

On remarquera aussi que s'il existe un entier p tel que $a_p \neq 0$ et tel que pour tout entier $n > p$ on a $a_n = 0$ alors la série génératrice de la suite (a_n) n'est autre qu'un polynôme de degré p qu'on notera $\sum_{n=0}^p a_n X^n$.

D'après la question 1.c) ci-dessus, la série génératrice $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$. Dans toute la suite, si la série génératrice $A(X)$ est inversible, on écrira son inverse sous la forme $\frac{1}{A(X)}$. Plus généralement si la série génératrice $A(X)$ est

inversible et si $B(X)$ est une série génératrice quelconque, le produit $B(X) \times \frac{1}{A(X)}$ sera noté $\frac{B(X)}{A(X)}$. Si de plus $B(X)$ et $A(X)$ sont des séries génératrices sous la forme de polynômes alors $\frac{B(X)}{A(X)}$ peut être assimilée à une fraction rationnelle sur \mathbb{K} et on admet que les techniques de décomposition en éléments simples sur \mathbb{K} restent valables pour $\frac{B(X)}{A(X)}$.

2) Éléments inversibles

2.a) Montrer que la série génératrice inversible $\sum_{n \geq 0} X^n$ a pour inverse $1 - X$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1 - X} = \sum_{n \geq 0} X^n$$

2.b) Soit $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, montrer que :

$$\frac{1}{1 - aX} = \sum_{n \geq 0} a^n X^n$$

2.c) Soient $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, $b \in \mathbb{K} - \{0\}$ avec $a \neq b$, montrer que :

$$\frac{1}{(1 - aX) \times (1 - bX)} = \left(\frac{a}{a - b} \right) \frac{1}{1 - aX} + \left(\frac{b}{b - a} \right) \frac{1}{1 - bX}$$

3) L'opérateur de dérivation

L'opérateur de dérivation, $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est défini par :

$$D : A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \mapsto D(A) = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n$$

3.a) Montrer que D est un endomorphisme du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Soient A et B deux séries génératrices. Montrer que :

3.b) $D(A \times B) = D(A) \times B + A \times D(B)$

(on pourra commencer par traiter le cas où $A = X^p$ et $B = X^q$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$).

3.c) Si B est inversible

$$D\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{D(A) \times B - A \times D(B)}{B^2}$$

4) Quelques exemples

4.a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont la série génératrice est :

$$A(X) = \frac{1}{(1 - X)^2}$$

est définie pour tout entier n par $a_n = n + 1$.

4.b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ dont la série génératrice est

$$A_p(X) = \frac{1}{(1 - X)^p}$$

est définie pour tout entier n par :

$$a_{p,n} = \binom{n + p - 1}{n}$$

- 4.c) Soit $A(X)$ la série génératrice d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $\frac{A(X)}{1-X}$ est la série génératrice de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

- 4.d) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+p-1}{k} = \binom{n+p}{n}$$

Partie II : séries génératrices et suites récurrentes

- 1) On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$$

On se propose de déterminer la formule explicite de a_n en fonction de n . On note $A(X)$ la série génératrice de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1.a) Montrer que :

$$A(X) = 2X \times A(X) + X^2 \times \sum_{n \geq 0} (n+1)X^n$$

- 1.b) Déterminer la décomposition en éléments simples sur \mathbb{K} de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2}{(1-X)^2 \times (1-2X)}$$

- 1.c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n .

- 2) On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

et on note $F(X)$ la série génératrice de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 2.a) Montrer que :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X} \right)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- 2.b) En déduire l'expression de F_n en fonction de n .

- 3) Suites récurrentes linéaires d'ordre k ($k \geq 1$).

Soit $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k$, avec $a_k \neq 0$. On considère l'ensemble \mathcal{U} des suites complexes (u_n) définies par la donnée de $(u_0, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \geq k, u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}.$$

(On utilisera, sans le démontrer, le fait que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel).

Soit $(u_n) \in \mathcal{U}$. On note S la série génératrice de (u_n) , et (E) l'équation caractéristique de (u_n) :

$$z^k = a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \dots + a_k \quad (E).$$

- 3.a) Montrer que $\phi : (u_n) \in \mathcal{U} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ est un isomorphisme de \mathcal{U} dans \mathbb{C}^k .
- 3.b) On pose $Q(X) = 1 - a_1X - \dots - a_kX^k$ et $P(X) = Q(X) \times S(X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme de degré au plus $k - 1$, à coefficients dans \mathbb{C} .
- 3.c) On note z_1, \dots, z_p les racines dans \mathbb{C} , de l'équation (E) et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les ordres de multiplicité respectifs de z_1, \dots, z_p .

Montrer qu'il existe des nombres complexes $b_{i,j}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \alpha_i$ tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right).$$

- 3.d) Montrer alors qu'il existe des polynômes R_1, \dots, R_p tels que pour tout n

$$u_n = \sum_{i=1}^p R_i(n) z_i^n \text{ où } \forall i, \deg(R_i) < \alpha_i.$$

- 3.e) On note \mathcal{V} l'ensemble des suites (v_n) dont le terme général s'écrit $v_n = \sum_{i=1}^p P_i(n) z_i^n$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, P_i est un polynôme tel que $\deg(P_i) < \alpha_i$.

Démontrer que $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel dont la dimension vérifie l'inégalité $\dim \mathcal{V} \leq k$ et déduire que $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Partie III : Nombre de partitions d'un ensemble

Soient $k \geq 1$ un entier et S un ensemble non vide, on dit que $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ est une partition de S en k classes si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, k\}, S_i \neq \emptyset \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, k\}^2, S_i \cap S_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^k S_i = S \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$ on note $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k classes. On pose par convention :

◇ pour tout entier $n \geq 1 : \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$

◇ pour tout entier $k > n : \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$

◇ $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$

- 1) Donner toutes les partitions de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en 2 classes.

Cette question montre que $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$. On se propose dans ce qui suit de calculer $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ en fonction de n et k .

- 2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

(On fixera un élément $s \in S$ et on considèrera les partitions contenant le singleton $\{s\}$ et les partitions qui ne le contiennent pas).

3) On considère la série génératrice

$$A_k(X) = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} X^n$$

3.a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$A_k(X) = X \times A_{k-1}(X) + kX \times A_k(X)$$

3.b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$A_k(X) = \frac{X^k}{\prod_{m=1}^k (1 - mX)}$$

3.c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^k (1 - mX)} = \sum_{r=1}^k \frac{\alpha_r}{1 - rX}$$

$$\text{où, pour tout } r \in \{1, \dots, k\}, \alpha_r = (-1)^{k-r} \frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$$

3.d) En déduire que, pour tout entier $n \geq k$:

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}$$

4) Application : nombre de surjections

On considère un ensemble E de cardinal n et un ensemble F de cardinal p où n et p sont deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre $S(n, p)$ de surjections de E sur F .

4.a) Que vaut $S(n, p)$ lorsque $p > n$?

4.b) Que vaut $S(n, n)$?

4.c) On suppose maintenant que $p \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que :

$$S(n, p) = p! \binom{n}{p}$$

Partie IV : Nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Un dérangement de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $p_n = \frac{d_n}{n!}$.

1) Calculer d_1, d_2 et d_3 .

2) Pour $0 \leq k \leq n$, on note B_k l'ensemble des permutations de \mathfrak{S}_n ayant exactement k points fixes.

- 2.a) Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité : $\text{Card}(B_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$$

- 2.b) Soit P la série génératrice de la suite (p_n) . Montrer que

$$E(X) \times P(X) = \sum_{n \geq 0} X^n, \text{ où } E(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n.$$

- 2.c) Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$.

- 2.d) En déduire que

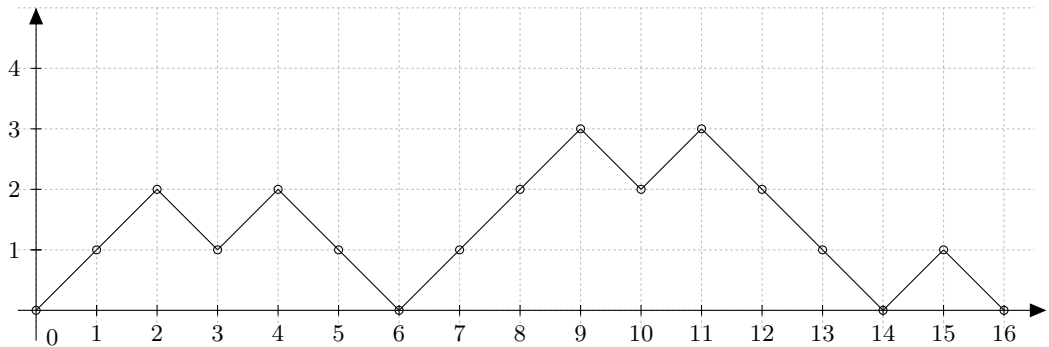
$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Partie V : Nombres de Catalan

1) Chemins de Dyck

Le plan est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$, toute suite $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de points du plan dont les coordonnées sont des entiers positifs tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et, tels que, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, s_{k+1} est l'image de s_k par la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ ou de vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.

Voici un chemin de Dyck de longueur 16.



On note c_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Les nombres c_n sont appelés **nombres de Catalan**. Pour tout chemin de Dyck $\mathcal{C} = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de longueur $2n$ on note $k(\mathcal{C})$ le plus petit entier tel que $s_{k(\mathcal{C})}$ soit d'ordonnée nulle et d'abscisse non nulle.

- Justifier que $k(\mathcal{C})$ est un entier pair.
- Montrer que le nombre de chemins de Dyck \mathcal{C} de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2n$ est égal à c_{n-1} .
- Montrer que le nombre de chemins de Dyck \mathcal{C} de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ avec $p \in \{1, \dots, n-1\}$ est égal à $c_{p-1}c_{n-p}$. (Par convention, on pose $c_0 = 1$).
- En déduire que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence :

$$c_n = \sum_{j=1}^n c_{j-1}c_{n-j}$$

2) Expression des nombres de Catalan

Soit r un nombre rationnel positif. On définit les coefficients binomiaux généralisés par :

$$\begin{cases} \binom{r}{0} = 1 \\ \binom{r}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (r-k)}{n!} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique série génératrice $S(X) = \sum_{n \geq 0} s_n X^n$ telle que :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ S(X)^2 = 1 - 4X \end{cases}$$

et que cette série génératrice est donnée par :

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n X^n$$

2.a) Montrer que :

$$S(X) = 1 - \sum_{n \geq 0} \frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} X^{n+1}$$

2.b) On pose

$$H(X) = \frac{1}{2}(1 - S(X))$$

$$\text{Vérifier que } H(X) = X + (H(X))^2$$

3) Soit $C(X)$ la série génératrice de la suite (c_n) des nombres de Catalan.

3.a) Montrer que :

$$X \times C(X) = X + (X \times C(X))^2$$

3.b) En déduire que, pour tout entier n , on a :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

puis que, pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$