Chapitre 1
Le principe du raisonnement par récurrence

I. Exemple introductif

On considère les suites de terme général :

$$u_n = 0 + 1 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$
$$v_n = 0^3 + 1^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3.$$

Ces deux suites sont définies par une **formule explicite**. On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer **explicitement** v_n en fonction de u_n. Autrement dit, on aimerait trouver une relation entre u_n et v_n.

À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux. Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour se faire une « idée » :

$$u_0 = \frac{0\,(0+1)}{2} = 0 \qquad v_0 = 0^3 = 0$$
$$u_1 = \frac{1\,(1+1)}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1 \qquad v_1 = 0^3 + 1^3 = 0 + 1 = 1$$
$$u_2 = \frac{2\,(2+1)}{2} = \frac{2\times 3}{2} = 3 \qquad v_2 = (0^3 + 1^3) + 2^3 = 1 + 8 = 9$$
$$u_3 = \frac{3\,(3+1)}{2} = \frac{3\times 4}{2} = 6 \qquad v_3 = (0^3 + 1^3 + 2^3) + 3^3 = 9 + 27 = 36$$
$$u_4 = \frac{4\,(4+1)}{2} = \frac{4\times 5}{2} = 10 \qquad v_4 = (0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3) + 4^3 = 36 + 64 = 100.$$

Nous remarquons alors que les suite (u_n) et (v_n) **semblent** obéir à une loi toute simple : à chaque rang n, le terme v_n est égal au carré du terme u_n correspondant.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

$$\boxed{\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n^2.}$$

Une conjecture n'est pas une preuve, ni une affirmation forcément vraie (certaines conjectures se révèlent parfois fausses) !!!

Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.

Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

Notons $\mathscr{P}$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\mathscr{P}(n) : v_n = u_n^2$.
Remarquons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, $v_0 = 0^3 = 0^2 = u_0^2$.
Supposons un instant que, **pour un certain entier *n***, on ait effectivement la propriété $v_n = u_n^2$. Alors on aurait **successivement** :

$v_{n+1} = 0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3$	en remplaçant n par $n + 1$ dans l'expression de v_n
$v_{n+1} = v_n + (n+1)^3$	par définition de la suite (v_n)
$v_{n+1} = u_n^2 + (n+1)^3$	car la propriété $\mathscr{P}$ est vraie jusqu'au rang n
$v_{n+1} = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$	en remplaçant u_n par son expression
$v_{n+1} = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4} + \dfrac{4\,(n+1)^3}{4}$	en effectuant des calculs élémentaires
$v_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2\,\big(n^2 + 4\,(n+1)\big)}{4}$	en factorisant par $(n + 1)$ au numérateur
$v_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2\,(n^2 + 4n + 4)}{4}$	en développant au numérateur
$v_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$	en remarquant l'identité remarquable
$v_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2 = u_{n+1}^2$	en remarquant que $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2}$

Ce qui est $\mathscr{P}(n + 1)$.

Autrement dit, si la propriété est vraiment à un certain rang n, alors elle l'est également au rang suivant : on dit que la propriété **$\mathscr{P}$ est héréditaire**.

Faisons un BILAN

On a vérifié que la propriété $\mathscr{P}$ était vraie aux rangs $n = 0, 1, 2, 3$ et 4 (on dit que a propriété **$\mathscr{P}$ est initialisée**). Mais comme elle est **héréditaire**, elle sera encore vraie au rang $n = 5$, puis au rang $n = 6$, etc.
Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang.

La démarche que venons d'esquisser s'appelle le **raisonnement par récurrence**. Observons son organisation en **deux étapes** :

Principe du raisonnement par récurrence :

Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou un intervalle I de $\mathbb{N}$).

Si :

* la propriété est **initialisée** à partir d'un certain rang n_0
(c'est-à-dire : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie),
* la propriété est **héréditaire** à partir du rang n_0
(c'est-à-dire : pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$),

Alors la propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Observation

La propriété $\mathscr{P}$ peut prendre des formes très variées : égalité, inégalité, phrase, affirmation, comme l'illustrent les exemples de ce chapitre, mais également ceux des chapitres à venir.

II. Démonstration mathématique du principe de récurrence (hors programme)

Énoncé :

Soit I un intervalle de $\mathbb{N}$.
On considère une propriété $\mathscr{P}$ concernant un entier n de I, que l'on note $\mathscr{P}(n)$ en général .

Si :

* $\exists\, n_0 \in \mathrm{I} : \mathscr{P}(n_0)$ (initialisation)
* $\forall\, n \in \mathrm{I} \cap [\![n_0, +\infty [\![$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ (hérédité)

Alors $\forall\, n \in \mathrm{I} \cap [\![n_0, +\infty [\![$, $\mathscr{P}(n)$.

Remarques :

1. Un intervalle de $\mathbb{N}$ est un ensemble de la forme $[\![a, b]\!]$ ou $[\![a, +\infty [\![$ (où a et $b \in \mathbb{N}$).
2. Le symbole $\exists$ signifie « il existe », et le symbole $\forall$ signifie « quelque soit ».
3. Deux étapes sont à démontrer :
   - le départ : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
   - le caractère héréditaire : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \geqslant n_0$, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie,
   pour conclure que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Démonstration

Soit I un intervalle de $\mathbb{N}$. On considère une propriété $\mathscr{P}$ concernant un entier n de I que nous allons noter $\mathscr{P}(n)$. On suppose que :

* $\exists\, n_0 \in \mathrm{I} : \mathscr{P}(n_0)$ (hypothèse d'initialisation)
* $\forall\, n \in \mathrm{I} \cap [\![n_0, +\infty [\![,\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ (hypothèse d'hérédité)

Considérons l'ensemble $\mathrm{E} = \left\{ n \in \mathrm{I} \cap [\![n_0, +\infty [\![\text{ tels que non } \mathscr{P}(n) \right\}$. E est l'ensemble des entiers (inclus dans $\mathbb{N}$) pour lesquels la propriété n'est pas vraie.

On **raisonne par l'absurde** en supposant que E est un ensemble **NON VIDE**.
On rappelle que la négation de $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ est : A et non B.

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Comme E est un ensemble non vide (par supposition) et minoré par l'entier n_0, il admet un plus petit élément noté m, vérifiant $m \geqslant n_0$.

Puisque m est un élément de E, il vérifie (toujours par supposition) non $\mathscr{P}(m)$.

Deux cas sont à distinguer :

- Supposons que $m = n_0$:
  Dans ce cas, on a alors non $\mathscr{P}(n_0)$, ce qui contredit l'hypothèse d'initialisation.
- Supposons que $m \neq n_0$:
  Dans ce cas, $m > n_0$ et non $\mathscr{P}(m)$. m étant le plus petit élément de E, l'entier $(m - 1)$ n'appartient pas à E et vérifie donc $\mathscr{P}(m-1)$ vraie. On a alors :
  $\mathscr{P}(m-1)$ et non $\mathscr{P}(m)$, ce qui contredit l'hypothèse d'hérédité.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce qui implique que l'hypothèse « E est un ensemble non vide » est fausse. Donc E est un ensemble vide, ce qui se traduit par :

$$\forall\, n \in \mathrm{I} \cap [\![n_0, +\infty [\![,\ \mathscr{P}(n).$$

II. Premiers exemples rédigés

Exemple 1

Énoncé : On considère la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Démontrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Solution : On considère la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n - 1$.
Pour cela, procédons par récurrence sur l'entier n : on considère la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $n \geqslant 0$ par : $\quad \mathscr{P}(n) : u_n = 2^n - 1$.

1. Observons que :
   - d'une part, $u_0 = 0$ d'après la définition de la suite (u_n) ;
   - d'autre part, $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
   La propriété $\mathscr{P}$ est donc **initialisée**, elle est vraie au rang $n = 0$: $\quad u_0 = 2^0 - 1$.

2. Supposons que, pour un certain entier $m \geqslant 0$ fixé, on ait la propriété $\mathscr{P}(m) : u_m = 2^m - 1$. Montrons qu'alors, on a la propriété $\mathscr{P}(m+1) : u_{m+1} = 2^{m+1} - 1$. On a :

   $u_{m+1} = 2u_m + 1$ d'après la définition de la suite (u_m)
   $u_{m+1} = 2(2^m - 1) + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence
   $u_{m+1} = 2^{m+1} - 2 + 1$
   $u_{m+1} = 2^{m+1} - 1$.

   Ce qui est $\mathscr{P}(m+1)$. La propriété est donc **héréditaire** à partir du rang $n = 0$ (c'est-à-dire pour tout $n \geqslant 0, \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$).

Bilan : On a $\mathscr{P}(0)$ et $\left(\text{pour tout } n \geqslant 0, \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)\right)$. D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie à tout rang plus grand que $n = 0$.

Exemple 2

Énoncé : Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution : Nous allons démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Observons que :

1. - d'une part, $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$;
   - d'autre part, $\dfrac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0$.
   La propriété $\mathscr{P}$ est donc **initialisée**, elle est vraie au rang $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6}.$$

2. Supposons que, pour un certain entier $m \geqslant 0$ fixé, on ait la propriété

$\mathscr{P}(m)$: $\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Montrons qu'alors, on a la propriété

$$\mathscr{P}(m+1) : \sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \sum_{k=0}^{m} k^2 + (m+1)^2$$

Donc d'après $\mathscr{P}(m)$,

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

En factorisant par $(m+1)$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)\big(m(2m+1)+6(m+1)\big)}{6}, \text{ soit}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(2m^2+m+6m+6)}{6}, \text{ ou encore}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$$

Observons alors que $(m+2)(2m+3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Ce qui est $\mathscr{P}(m+1)$. La propriété est donc **<u>héréditaire</u>** à partir du rang $n = 0$ (c'est-à-dire pour tout $n \geqslant 0, \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$).

Bilan : On a $\mathscr{P}(0)$ et $\big(\text{pour tout } n \geqslant 0, \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)\big)$. D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie à tout rang plus grand que $n = 0$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$