SÉQUENCE

V

Fractions (partie 1)

1 Vocabulaire

1 Fraction et quotient

Exemple : Le quotient de $3{,}5$ par 2 est le résultat de la division de $3{,}5$ par 2. On le note $3{,}5 \div 2 = \dfrac{3{,}5}{2} = 1{,}75$.

$\dfrac{3{,}5}{2}$ est l'écriture fractionnaire et $1{,}75$ est l'écriture décimale.

Une écriture fractionnaire donne un **nombre rationnel**.

dividende — numérateur

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

diviseur — dénominateur

2 Fraction et produit

DÉFINITION

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est la solution de l'opération à trou : $b \times \square = a$.

Exemple : Le nombre $\dfrac{5}{6}$ est le nombre qui multiplié par 6 donne 5 (car $6 \times \dfrac{5}{6} = 5$).

3 Nombre entier, nombre rationnel et nombre décimal

Exemples :

- $\dfrac{35}{7} = 35 \div 7 = 5$ — $\dfrac{35}{7}$ est un nombre rationnel qui est un nombre entier.
- $\dfrac{15}{4} = 15 \div 4 = 3{,}75$ — $\dfrac{15}{4}$ est un nombre rationnel qui est un nombre décimal.
- $\dfrac{10}{3} = 10 \div 3 \approx 3{,}3333333\ldots$ — $\dfrac{10}{3}$ n'est pas un nombre décimal car la division ne se termine pas.

  On ne peut donc pas donner une valeur exacte du quotient $\dfrac{10}{3}$.

  On ne peut en donner qu'une valeur approchée : $\dfrac{10}{3} \approx 3{,}33$ (valeur approchée au centième).

2 Proportion

Exemple : Dans le mot « FRACTION », 5 lettres sur les 8 sont des consonnes. On dit que la proportion (ou la fréquence) de consonnes du mot « FRACTION » est $\frac{5}{8}$.

$\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0{,}625 = \frac{62{,}5}{100}$, donc cette fréquence peut aussi s'exprimer par le pourcentage 62,5%.

DÉFINITIONS

★ **Lorsque le numérateur et le dénominateur sont des entiers, on parle de fraction.**

★ **L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ où a est un nombre relatif et b un nombre relatif non nul est appelé l'ensemble des nombres rationnels.**

Exemples :

- $\frac{4}{5}$ est une fraction. 4 est le numérateur et 5 est le dénominateur.
- $\frac{6{,}5}{8}$ n'est pas une fraction, c'est une écriture fractionnaire (ou un quotient).

Remarque

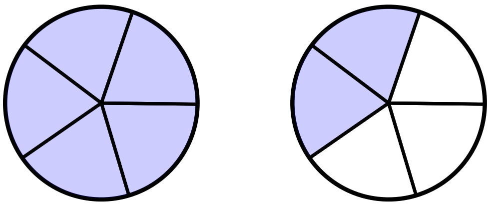
Les nombres décimaux et les nombres relatifs sont des nombres rationnels car on peut toujours les écrire sous la forme d'une fraction (grâce à la règle d'or vue en 6e). Par exemple : $-2{,}35 = \frac{-2{,}35}{1} = \frac{-235}{100}$.

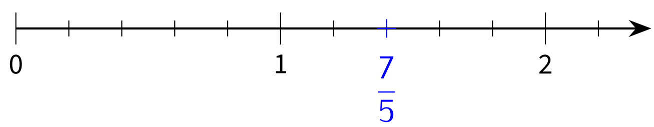
DIFFÉRENTS SENS DE L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

La fraction $\frac{7}{5}$ se lit « sept cinquièmes ». Cette fraction est égale :

- à 7 fois un cinquième car $\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 7$,
- au quotient de 7 par 5 car $\frac{7}{5} = 7 \div 5$,
- au nombre qui multiplié par 5 donne 7 car $7 = 5 \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \times 5$,
- au nombre $1 + \frac{2}{5}$.

On peut aussi représenter cette fraction de plusieurs façon, par exemple :





Remarque

Lorsque le dénominateur est égal à 10, 100, 1000, … on dit que c'est une **fraction décimale**, par exemple $\frac{93}{100}$ ou $\frac{6}{10}$.

MÉTHODE (prendre la fraction d'un quantité)

Pour prendre une fraction d'une quantité, on multiplie la fraction par cette quantité.

Par exemple, pour calculer les $\frac{2}{5}$ de 400, on peut faire (au choix) :

- $\frac{2}{5} \times 400 = \frac{400}{5} \times 2 = 80 \times 2 = 160$,
- $\frac{2}{5} \times 400 = \frac{2 \times 400}{5} = \frac{800}{5} = 160$,
- $\frac{2}{5} \times 400 = 0{,}4 \times 400 = 160$.

3 Quotients égaux

CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ (RAPPELS)

- Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).
- Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

« RÈGLE D'OR » DES QUOTIENTS

On ne change pas un quotient en multipliant (ou en divisant) son numérateur $\boxed{\text{ET}}$ son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemple : $\frac{1}{2{,}2} \overset{\times 5}{=} \frac{5}{11}$ que l'on peut aussi écrire $\frac{1}{2{,}2} = \frac{1 \times 5}{2{,}2 \times 5} = \frac{5}{11}$, ou encore $\frac{48}{28} \overset{\div 4}{=} \frac{12}{7}$.

1 Simplifier une fraction

DÉFINITION

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petit (attention donc à ne pas tomber sur un nombre à virgule !).

Exemple : Simplifier les fractions $A = \frac{15}{20}$; $B = \frac{8}{6}$; $C = \frac{32}{24}$; $D = \frac{160}{280}$; $E = \frac{14}{49}$; $F = \frac{56}{16}$; $G = \frac{35}{45}$; $H = \frac{88}{33}$ et $I = \frac{8}{2}$.

Solution : $A = \frac{3}{4}$; $B = C = \frac{4}{3}$; $D = \frac{4}{7}$; $E = \frac{2}{7}$; $F = \frac{7}{2}$; $G = \frac{7}{9}$; $H = \frac{8}{3}$ et $I = \frac{4}{1} = 4$

⚓ Remarque

Aucun autre nombre que 1 ne divise à la fois 3 et 4, la fraction $\frac{3}{4}$ ne peut plus être simplifiée. On dit que cette fraction est **irréductible**.

2 Division par un nombre décimal

PROPRIÉTÉ

Pour diviser par un nombre décimal non entier, on se ramène à la division par un nombre entier en multipliant le dividende et le diviseur par 10 ou par 100 ou par 1 000 ...

Exemple : Calculer $3{,}57 \div 1{,}4$:

Solution : $3{,}57 \div 1{,}4 = \frac{3{,}57}{1{,}4} = \frac{3{,}57 \times 10}{1{,}4 \times 10} = \frac{35{,}7}{14}$. Il ne reste alors qu'à poser la division pour conclure ($= 2{,}55$).

4 Comparer ou ranger des fractions

PROPRIÉTÉ

Pour comparer ou ranger plusieurs fractions, il faut d'abord qu'elles soient sur le même dénominateur (quitte à utiliser la « règle d'or »). Elles sont alors rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : Comparer les fractions suivantes :

- ☆ $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{5}$: $3 < 8$, donc $\frac{3}{5} < \frac{8}{5}$.
- ☆ $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ et $3 > 2$, donc $\frac{3}{8} > \frac{2}{8}$, c'est-à-dire $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$.
- ☆ $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ et $5 < 6$, donc $\frac{5}{9} < \frac{6}{9}$, c'est-à-dire $\frac{5}{9} < \frac{2}{3}$.

■ **EXERCICE :** Range les fractions suivantes dans l'ordre croissant :

$$\frac{13}{20} \quad ; \quad \frac{7}{10} \quad ; \quad \frac{9}{4} \quad ; \quad \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}.$$

Solution : Puisque $\frac{13}{20} = \frac{13}{20}$ (pas besoin de transformer cette fraction puisque c'est déjà celle qui a le plus grand dénominateur), $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$, $\frac{9}{4} = \frac{45}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ et $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$ et aussi $\frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{13}{20} < \frac{14}{20} < \frac{45}{20}$, on a donc finalement que :

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{9}{4}.$$