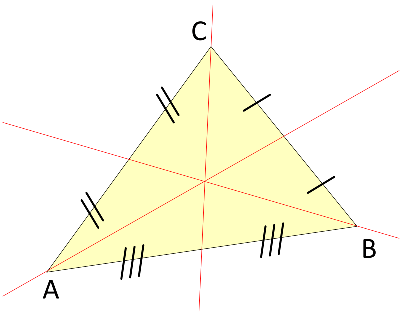
ÉNONCÉ ET CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N° 2 – 4ème

Exercice n° 69 p. 162 : Point d'intersection des médianes d'un triangle

A. Conjecture

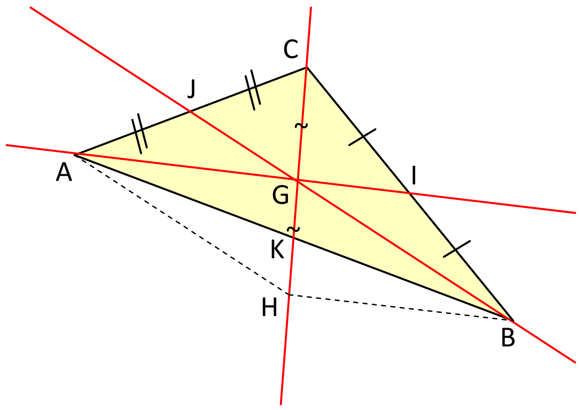
Tracer un triangle et ses trois médianes. Que constate-t-on ?



On constate que ses trois médianes se coupent en un même point.

B. Construction

Tracer un triangle ABC.
La médiane issue de A coupe le segment [BC] en son milieu I.
La médiane issue de B coupe le segment [AC] en son milieu J.
On appelle G, le point d'intersection des deux médianes.
La droite (CG) coupe le segment [AB] en K.
Le point H est le symétrique du point C par rapport au point G.



C. On veut prouver que la droite (CG) est la troisième médiane du triangle ABC

1. En considérant le triangle CBH, prouver que (GI) // (BH).
   Je sais que I et G sont les milieux des segments [CB] et [CH] (en effet, H est le symétrique de C par rapport à G veut exactement dire que G est le milieu de [CH]). Dans le triangle CBH, le premier théorème des milieux nous permet d'affirmer que les droites (GI) et (HB) sont parallèles.
2. En considérant le triangle CHA, prouver que (GJ) // (HA).
   Je sais que G et J sont les milieux des côtés [CH] et [CA]. D'après le premier théorème des milieux dans le triangle CAH, les droites (GJ) et (HA) sont parallèles.
3. En déduire que le quadrilatère AGBH est un parallélogramme.
   Puisque (GI) = (AG) et (GJ) = (BG), on vient de démontrer que les côtés opposés du quadrilatère AGBH sont parallèles. C'est donc un parallélogramme.
4. a) Prouver que le point K est le milieu du segment [AB].
   Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, et puisque K est le point d'intersection des diagonales [GH] et [AB], on en déduit que K est en particulier le milieu de [AB].
   b) Que représente la droite (CG) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
   La droite (CG) passe par un sommet du triangle ABC et par le milieu du côté opposé : c'est donc une médiane du triangle.
5. On vient de démontrer que : « Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes. »

D. On veut préciser la position du point d'intersection des médianes d'un triangle

1. Justifier l'égalité KH = KG.
   D'après le question 3, K est aussi le milieu du segment [GH]. L'égalité KH = KG est alors immédiate…
2. Justifier l'égalité CG = 2 × KG.
   Puisque G est le milieu de CH, on a CG = GH = GK + KH = 2 × KG (d'après la question précédente).
3. Justifier l'égalité CK = 3 × KG.
   CK = CG + GK = 2 × KG + KG = 3 × KG (d'après la question précédente).
4. En déduire que CG = $\frac{2}{3}$CK.

   L'égalité précédente s'écrit aussi KG = $\frac{CK}{3}$. En remplaçant ce résultat dans celui de la question 2, on trouve finalement que CG = 2 × $\frac{CK}{3}$ = $\frac{2}{3}$CK.

On dira que le point d'intersection des médianes d'un triangle est situé aux deux-tiers de chacune d'elles en partant du sommet.