DEVOIR MAISON n° 3 – 2nde 7

À rendre le mardi 13 mars 2012 *DERNIER DÉLAI* !

Exercice 1 (3 points)

Mettre sous forme d'une équation ou d'un système linéaire les problèmes suivants, sans les résoudre :

1. Le périmètre d'un rectangle vaut 32 cm. Quand on augmente sa longueur de 5 cm et sa largeur de 4 cm, son aire augmente de 91 cm^2. Que valent les côtés du rectangle ?
   Soient L sa longueur et ℓ sa largeur. Alors L + ℓ = 32 et (L + 5) + (ℓ + 4) = Lℓ + 91. On a donc le système suivant :
   $$\boxed{\begin{cases} L + \ell = 32 \\ (L+5) + (\ell+4) = L\ell + 91. \end{cases}}$$

2. Un père dit à ses enfants : Aujourd'hui, la somme de nos âges est 54 ans, et j'ai 3 fois l'âge de Julie. Dans 4 ans, j'aurai 4 fois l'âge de Charles. Quels sont leurs âges ?
   Soient P l'âge du père, J celui de Julie et C celui de Charles. Alors le système à résoudre est :
   $$\boxed{\begin{cases} P + J + C = 54 \\ P - 4C = 16 \\ P = 3J. \end{cases}}$$
   $\Leftrightarrow P + J + C = 54$ (« Aujourd'hui, la somme de nos âges est 54 ans »)
   $\Leftrightarrow P + 4 = 4(C + 4)$ (« Dans 4 ans, j'aurai 4 fois l'âge de Charles »)
   $\Leftrightarrow P = 3J$ (« j'ai 3 fois l'âge de Julie »)

3. Une dame donne à un premier mendiant la moitié de ce qu'elle a sur elle plus un euro. Puis elle donne à un second mendiant la moitié de ce qu'il lui reste plus deux euros, et à un troisième la moitié de ce qu'il lui reste, plus trois euros. Il ne lui reste plus qu'un euro. Combien avait-elle au début de sa promenade ?
   Soit x la somme de départ. Récapitulons ce qu'elle donne et qui lui reste dans un tableau :

mendiant	perte (€)	reste (€)
1er	$\frac{x}{2}+1$	$x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-1$
2e	$\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+2=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)+2=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$	$\frac{x}{2}-1-\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{x}{4}-\frac{5}{2}$
3e	$\frac{\frac{x}{4}-\frac{5}{2}}{2}+3=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{5}{2}\right)+\frac{12}{4}=\frac{x}{8}-\frac{5}{4}+\frac{12}{4}=\frac{x}{8}+\frac{7}{4}$	$\frac{x}{4}-\frac{5}{2}-\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{4}\right)=\frac{x}{8}-\frac{17}{4}$

Cette dernière somme est égale à 1, donc l'équation à résoudre est : $\boxed{\frac{x}{8}-\frac{17}{4}=1}$ $\left(\Leftrightarrow x=\frac{21}{4}\times 8=21\times 2=42\ €\right)$.

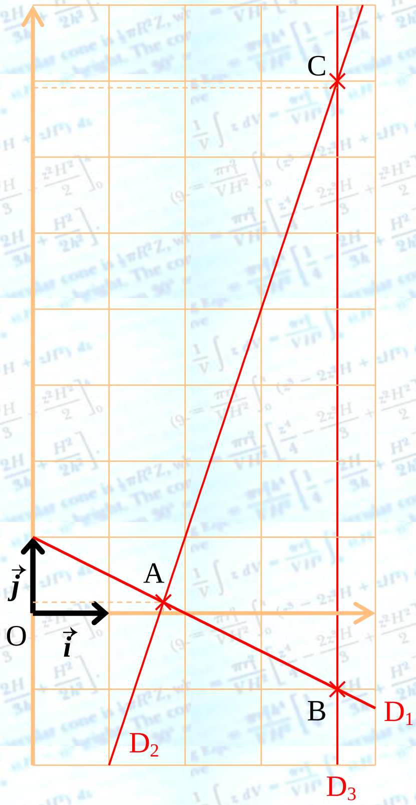
Vérification : • *elle donne au premier mendiant 42/2 + 1 = 21 + 1 = 22 € (reste : 42 – 22 = 20 €)*
• *elle donne au second mendiant 20/2 + 2 = 10 + 2 = 12 € (reste : 20 – 12 = 8 €)*
• *elle donne au troisième mendiant 8/2 + 3 = 4 + 3 = 7 €. Il reste bien 8 – 7 = 1 € !*

Exercice 2 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Représenter la droite D_1 d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et la droite D_2 d'équation $y = 3x - 5$. (voir p. 2)

2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection de D_1 et D_2.
   $$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 1 = 3x - 5 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{12}{7}.\text{ Donc } y = 3\times\frac{12}{7} - 5 = \frac{36}{7} - \frac{35}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow A\left(\frac{12}{7} ; \frac{1}{7}\right).$$

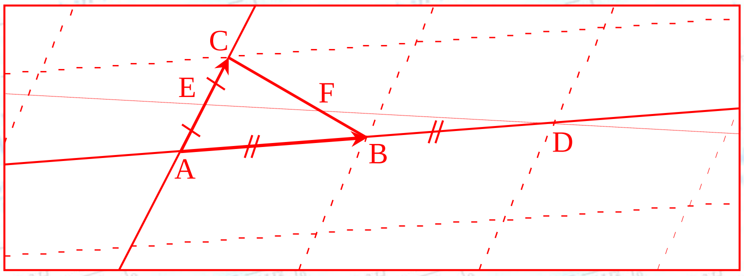


3. Représenter la droite D_3 d'équation $x = 4$, et déterminer ses points d'intersection avec D_1 et D_2, que l'on appellera B et C.
Sachant que D_3 : $x = 4$, on sait déjà que $x_B = x_C = 4$. Par conséquent,
$$y_B = -\frac{1}{2}x_B + 1 = -\frac{1}{2} \times 4 + 1 = -2 + 1 \quad \Rightarrow B(4\,;-1).$$
$$y_C = 3 \times x_C - 5 = 3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7 \quad \Rightarrow C(4\,;7).$$

4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur D_3, puis l'aire du triangle ABC.
Notons H ce projeté orthogonal. H et A étant à la même hauteur, on a directement $H\left(4\,;\frac{1}{7}\right)$. D'après le graphique, BC = 8 cm. On a aussi $AH = x_H - x_A = 4 - \frac{12}{7} = \frac{16}{7}$.
Puisque les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires, on a :
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{8}{2} \times \frac{16}{7} = 4 \times \frac{16}{7} = \frac{64}{7}\text{ cm}^2\text{, soit environ }9{,}142857142857\ldots\text{ cm}^2.$$

Exercice 3 (3 points)

ABC est un triangle. On se placera dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



1. Faire une figure que l'on complétera par la suite. Quelles sont les coordonnées des points A, B et C ?
A(0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1) (attention au repère !!!)
2. D est le symétrique de A par rapport à B, E est le milieu de [AC], F vérifie $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Quelles sont les coordonnées de D, E et F ? Représenter ces points.

$D(2\,;0)$, $E\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\frac{1}{3}(-1\,;1) = \left(-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right) \Rightarrow F\left(1-\frac{1}{3}\,;0+\frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

3. Montrer que D, E et F sont alignés.

$\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\,;y_F - y_E) = \left(\frac{2}{3} - 0\,;\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{ED}(x_D - x_E\,;y_D - y_E) = \left(2 - 0\,;0 - \frac{1}{2}\right) = \left(2\,;-\frac{1}{2}\right)$.

On constate alors que $\overrightarrow{ED} = 3\overrightarrow{EF}$, donc d'après une propriété du cours, les points D, E et F sont alignés.

Exercice 4 (1 point)

Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} (x+2y)(x-y) = 0 \\ 2x - 5y = 1. \end{cases}$

Notons (S) se système. Alors, par substitution, on a :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(x-y) = 0 \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}y + \frac{1}{2} + 2y\right)\left(\frac{5}{2}y + \frac{1}{2} - y\right) = 0 \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9}{2}y + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{9} \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{18} \\ y = -\frac{1}{9} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)\,;\left(\frac{2}{9}\,;-\frac{1}{9}\right)\right\}$.