COURS : LOGIQUE

I – Propriété et réciproque

Définition : Une propriété mathématique est une affirmation qui est toujours vraie. Elle ne comporte aucune exception.

Une propriété se compose
- d'un « chapeau », c'est-à-dire d'objets mathématiques qui doivent être présents pour pouvoir appliquer la propriété (nous verrons dans des exemples que le chapeau est facultatif et pourquoi l'on met certaines conditions dedans et d'autres non) ;
- d'une ou plusieurs « hypothèses » (H), c'est-à-dire de conditions qui doivent être vérifiées pour pouvoir appliquer la propriété ;
- d'une ou plusieurs « conclusions » (C).

Remarque : La propriété privée de son chapeau s'énonce généralement sous la forme simple **« Si (H), alors (C) »**. On dit qu'on a une **implication**. Dans ce cas, on peut aussi noter « **(H)** $\Rightarrow$ **(C)** ».

Remarque : Une hypothèse est une donnée à partir de laquelle on raisonne.

Exemples :

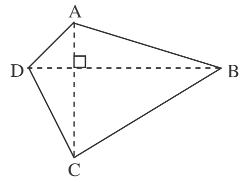
Propriété	Si M est un point de la médiatrice du segment [AB], alors MA = MB.	Soit ABC un triangle. Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.	Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et *d* une droite passant par I. Si *d* est une droite parallèle à (BC), alors *d* passe par le milieu de [AC].
Chapeau		Soit ABC un triangle.	Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et *d* une droite passant par I.
Hypothèse(s)	M est un point de la médiatrice du segment [AB]	ABC est rectangle en A	*d* est une droite parallèle à (BC)
Conclusion(s)	MA = MB	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	*d* passe par le milieu de [AC]

Définition : L'énoncé réciproque d'une propriété s'obtient en inversant conclusion et hypothèse. Le chapeau est par contre conservé.

Exemples : On peut reprendre les exemples ci-dessus en inversant hypothèse et conclusion. Nous obtiendrons alors les énoncés suivants :
- Si MA = MB, alors M est un point de la médiatrice du segment [AB] ;
- Soit ABC un triangle. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A ;
- Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Si *d* = (IJ), alors *d* est parallèle à (BC) (et passe par I : mais cette information est accessoire puisque déjà incluse dans l'hypothèse).

Puisque chaque énoncé est vrai, on peut le qualifier de propriété.

L'énoncé réciproque d'une propriété n'est pas toujours vrai, ce n'est donc pas toujours une propriété. Par exemple, considérons la propriété « Si ABCD est un losange, alors (AC) $\perp$ (BD) ». Sa réciproque serait « Si (AC) $\perp$ (BD), alors ABCD est un losange » est absolument fausse :



On voit bien ici l'intérêt du chapeau.

Supposons que nous l'intégrions aux hypothèses du théorème des milieux. Celui-ci deviendrait alors « Si ABC est un triangle tel que I (resp. J) soit le milieu de [AB] (resp. [AC]) et *d* la droite parallèle à (BC) passant par I, alors *d* est la droite (IJ) ».

L'énoncé réciproque serait alors « Si *d* = (IJ), alors ABC est un triangle tel que I (resp. J) soit le milieu de [AB] (resp. [AC]) et *d* est la droite parallèle à (BC) passant par I », ce qui n'a aucun sens. En effet, on rappelle que l'hypothèse étant une donnée à partir de laquelle on raisonne, il faut que tous les objets qu'elle contient soient définis, ce qui n'est ici pas le cas de I et de J.

A retenir : Le chapeau contient donc tous les éléments qui sont à la fois présents dans les hypothèses et la conclusion, sauf bien sûr si la propriété n'admet pas de réciproque.

II – Equivalence

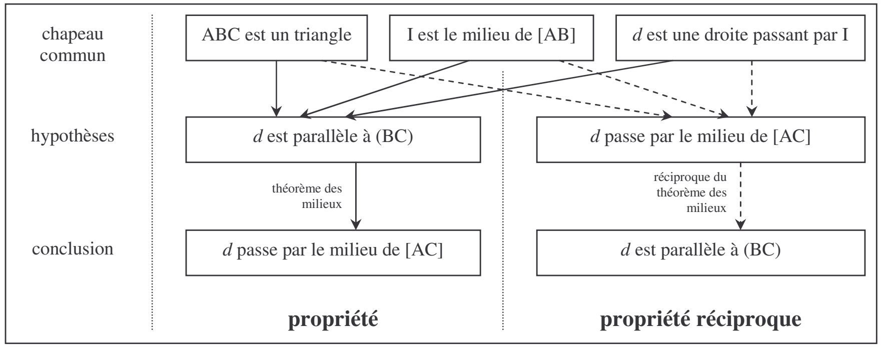
Définition : Lorsque l'énoncé réciproque d'une propriété est vrai, on peut regrouper cette propriété et sa réciproque en un seul énoncé utilisant l'expression « si et seulement si ». On dit alors qu'on a une équivalence.

Remarque : Si une propriété s'écrit **« chapeau. (H) ⇒ (C) »** et si sa réciproque **« chapeau. (C) ⇒ (H) »** est vraie, alors on peut regrouper les deux sous la forme **« chapeau. (H) ⇔ (C) »**, et cela se lit **« chapeau. (H) si et seulement si (C) »**.

Exemples : Reprenons toujours les exemples de la partie I. Après avoir vérifié que les énoncés réciproques étaient aussi vrais, nous pouvons dire que :

- Un point est sur la médiatrice d'un segment si et seulement si ce point est à égale distance des extrémités de ce segment.
- Soit ABC un triangle. ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$;
- Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et *d* une droite passant par I. *d* est parallèle à (BC) si et seulement si *d* passe par le milieu de [AC].

Reprenons schématiquement l'exemple du théorème de la droite des milieux et sa réciproque :



III – Réciproque

Faisons un point sur le vocabulaire :

- Vérifier une affirmation sur quelques exemples n'est pas démontrer ;
- Voir sur une figure n'est pas non plus démontrer ;
- Conjecturer c'est deviner, imaginer, émettre des hypothèses ;
- Construire c'est dessiner, en justifiant par des définitions et/ou des propriétés, la figure demandée.
- Prouver, montrer ou démontrer, c'est réaliser un raisonnement rédigé à partir des données du problème, grâce aux outils du cours (définition ou propriétés) ;
- En déduire que… c'est utiliser impérativement le résultat de la question précédente dans un nouveau raisonnement.

On rappelle aussi qu'effectuer un raisonnement par l'absurde, c'est prendre comme hypothèse le contraire (on dit la négation) de la conclusion. On applique alors un raisonnement déductif (c'est-à-dire partir des données du problème, utiliser des outils du cours pour aboutir à la conclusion souhaitée) afin d'aboutir à une contradiction avec une donnée du problème ou avec une propriété connue.

Exemple : « Démontrer que le triangle dont les côtés ont pour longueurs 5 cm, 6 cm et 7 cm n'est pas rectangle. »

on prend comme hypothèse le contraire de la conclusion	On suppose que le triangle est rectangle.
on utilise les outils du cours (ici le théorème de Pythagore)	D'après le théorème de Pythagore, on devrait alors avoir l'égalité $7^2 = 6^2 + 5^2$.
on aboutit à une contradiction avec une propriété connue (ici la conclusion du théorème de Pythagore)	Or $7^2 = 49$ et $6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$, et $49 \neq 61$.
on en déduit que la supposition faite au début de la démonstration est fausse	L'égalité $7^2 = 6^2 + 5^2$ est donc fausse, d'où le triangle n'est pas rectangle.

Une démonstration par l'absurde est souvent utilisée pour montrer qu'une propriété est fausse (si l'on avait supposé que le triangle ci-dessus était rectangle, la conclusion du raisonnement par l'absurde effectué est que ce triangle ne l'est pas.

On peut aussi, pour un cas plus général, trouver un contre-exemple. En effet, trouver un contre-exemple suffit à dire que l'énoncé possède une exception, et n'est donc pas vrai tout le temps, ce n'est donc pas une propriété. Par exemple, l'énoncé « Un quadrilatère qui possède ses diagonales perpendiculaires est un losange » est faux : le contre-exemple est la figure présentée au haut de la seconde page.

Remarque : Une propriété simple ne s'énonce pas toujours sous la forme « Si (H), alors (C) ». En effet, l'énoncé « Un losange possède ses diagonales perpendiculaires » cache la propriété « Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires ».

IV – Exercice

Voici plusieurs affirmations que M. LENZEN énonce. Sont-elles vraies ? Si non, donner un contre-exemple :

a. « Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme. »
b. « Si un quadrilatère a un angle droit, alors c'est un rectangle. »
c. « Si un quadrilatère a deux angles droits, alors c'est un rectangle. »
d. « Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle. »
e. « Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle. »
f. « Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un carré. »
g. « Si un losange a un angle droit, alors c'est un carré. »
h. « Si dans un parallélogramme les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré. »
i. « Si dans un parallélogramme les diagonales ont la même longueur, alors c'est un rectangle. »