COMPLEMENTS SUR L'ENSEMBLE DE DEFINITION

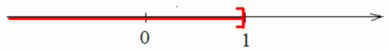
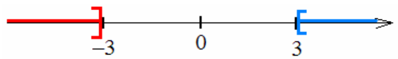
Cas où $f(x)$ est un quotient (ou contient un quotient)

<table>
<tr><th colspan="3">Cas général</th><th>Exemple 1 :
$f(x)$ est un quotient</th><th>Exemple 2 :
$f(x)$ contient un quotient</th></tr>
<tr><td colspan="3">$f : x \mapsto f(x)$
On sait que f ne sera définie que si le dénominateur qu'elle contient n'est pas nul.</td><td>$f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$</td><td>$f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{3x - 6}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. On écrit la définition de l'ensemble de définition :
$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que « dénominateur $\neq 0$ »$\}$.</td><td>1. On écrit la définition de l'ensemble de définition :
$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 \neq 0\}$</td><td>1. On écrit la définition de l'ensemble de définition :
$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $3x - 6 \neq 0\}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. On résout alors l'équation « dénominateur = 0 » afin de déterminer quelles seront les valeurs interdites, c'est-à-dire les valeurs qui annuleront le dénominateur.</td><td>2. On résout l'équation $x^2 - 1 = 0$:
$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$, donc $\boldsymbol{x = 1}$ ou $\boldsymbol{x = -1}$.</td><td>2. On résout l'équation $3x - 6 = 0$:
$3x - 6 = 0$
$3x = 6$, et donc $\boldsymbol{x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$.</td></tr>
<tr><td>3. Si on a trouvé qu'une seule valeur a, alors $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq a\}$.</td><td>Si on a trouvé deux valeurs a et b, alors $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq a$ et $x \neq b\}$.</td><td>On peut aussi ne pas trouver de solutions (par exemple $x^2 + 4 = 0$ n'admet pas de solution réelle), auquel cas « dénominateur = 0 » n'apporte pas de valeurs interdites, et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.</td><td>3. On a trouvé deux valeurs interdites, notre ensemble de définition est donc :
$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$ et $x \neq -1\}$</td><td>3. On n'a trouvé qu'une valeur, donc notre ensemble de définition s'écrira
$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \neq \frac{1}{2}\right\}$</td></tr>
<tr><td>4. On simplifie l'écriture de $\mathcal{D}_f$:
$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{a\}}$</td><td>On simplifie l'écriture de $\mathcal{D}_f$:
$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{a , b\}}$</td><td>L'écriture de $\mathcal{D}_f$ est déjà simplifiée, puisqu'on n'avait aucune valeur interdite : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.</td><td>4. Il ne reste plus qu'à simplifier l'écriture :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$.</td><td>4. Il ne reste plus qu'à simplifier l'écriture :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.</td></tr>
</table>

Autre exemple complètement rédigé : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = x + \dfrac{x}{2x - 1} - \dfrac{2x + 1}{x^2 - 4}$.

L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $2x - 1 \neq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0\}$. Il s'agit donc de résoudre les équations $2x - 1 = 0$ et $x^2 - 4 = 0$ pour trouver les valeurs interdites. La première donne $x = \dfrac{1}{2}$ et la seconde donne $x = 2$ ou $x = -2$. L'ensemble de définition devient alors $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \dfrac{1}{2}$; $x \neq 2$ et $x \neq -2\}$, soit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{-2 , \dfrac{1}{2} , 2\right\}$.

Cas où $f(x)$ est une racine (ou contient une racine)

Cas général	**Exemple 1 : $f(x)$ est une racine**	**Exemple 2 : $f(x)$ contient une racine**
$\boldsymbol{f : x \mapsto f(x)}$ On sait que f ne sera définie que si ce qui est sous la racine est positif.	$f(x) = \sqrt{1-x}$	$f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 9}$
1. On écrit la définition de l'ensemble de définition : **$\mathcal{D}_f$ = {$x \in \mathbb{R}$ tel que « ce qui est sous la racine $\geqslant 0$ »}.**	1. On écrit la définition de l'ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 1 - x \geqslant 0\}$	1. On écrit la définition de l'ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 9 \geqslant 0\}$
2. On résout alors l'inéquation « ce qui est sous la racine $\geqslant 0$ » afin de déterminer quelles seront les valeurs qui permettent de définir la racine, c'est-à-dire les valeurs qui seront dans l'ensemble de définition.	2. On résout l'inéquation $1 - x \geqslant 0$: $1 - x \geqslant 0$ $1 \geqslant x$, donc $\boldsymbol{x \leqslant 1}$.	2. On résout l'équation $x^2 - 9 \geqslant 0$: $x^2 - 9 \geqslant 0$ $x^2 \geqslant 9$, et donc $\boldsymbol{x \leqslant -3}$ **et** $\boldsymbol{x \geqslant 3}$.
3. On reporte les résultats sur une droite graduée, ce qui nous aidera à écrire plus simplement l'ensemble de définition.	3. 	3. 
4. On simplifie l'écriture de $\mathcal{D}_f$.	4. Il ne reste plus qu'à simplifier l'écriture : $\mathcal{D}_f =]-\infty\ ;\ 1]$.	4. Il ne reste plus qu'à simplifier l'écriture : $\mathcal{D}_f =]-\infty\ ;\ -3] \cup [3\ ;\ +\infty[$.

⚠

Une fonction peut aussi être plus compliquée, à savoir (par exemple) un quotient sous une racine ou une racine au dénominateur d'un quotient. On va traiter un exemple en détail :

On souhaite déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-9}}$.

On a alors $\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \dfrac{x+3}{x^2-9} \geqslant 0 \text{ et } x^2 - 9 \neq 0\right\}$. Or $\dfrac{x+3}{x^2-9} = \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$, donc $\dfrac{1}{x-3} \geqslant 0$ revient à $x - 3 \geqslant 0$ (car si $x - 3$ était négatif, le dénominateur du quotient le serait, donc le quotient aussi), c'est-à-dire $x \geqslant 3$. De plus, $x^2 - 9 = 0$ revient à $x = 3$ ou $x = -3$. En utilisant une droite graduée, on hachurerait tout ce qui est à droite de 3 et exclurait les points -3 et 3 qui sont valeurs interdites, ce qui revient à dire (en regardant tout ce qui est hachuré, et en faisant bien attention à enlever les valeurs interdites) que $\mathcal{D}_f =]3\ ;\ +\infty[$. (en effet, on n'a pas besoin d'enlever -3 puisqu'on sait déjà les valeurs autorisées sont nécessairement dans l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$, et donc la seule valeur interdite qu'il faille encore enlever est 3 !).

Plus tard, quand vous aurez l'habitude, vous écrirez plutôt (en reprenant les exemples ci-dessus) :

$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}}$ **:** $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\}$ $= \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$.	$\boldsymbol{f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{3x-6}}$ **:** $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 6 \neq 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1/2\}$ $= \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.	$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1-x}}$ **:** $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x \geqslant 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$ $=]-\infty\ ;\ 1]$.	$\boldsymbol{f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2-9}}$ **:** $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 \geqslant 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 3\}$ $=]-\infty\ ;\ -3] \cup [3\ ;\ +\infty[$.	$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-9}}}$ **:** $\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 \neq 0 \text{ et } \dfrac{x+3}{x^2-9} \geqslant 0\right\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\ ;\ x \neq 3 \text{ et } x \geqslant 3\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} =]3\ ;\ +\infty[$.

Mais avant, les étapes intermédiaires sont absolument à faire pour chaque détermination d'ensemble de définition, même si vous ne les faites qu'au brouillon et pas sur la copie. L'objectif est de pouvoir déterminer un ensemble de définition selon la méthode du tableau précédent (avec les calculs intermédiaires au brouillon car vous n'êtes pas encore capables de déterminer les solutions d'une équation ou inéquation de tête), et avec la rédaction qui s'impose.