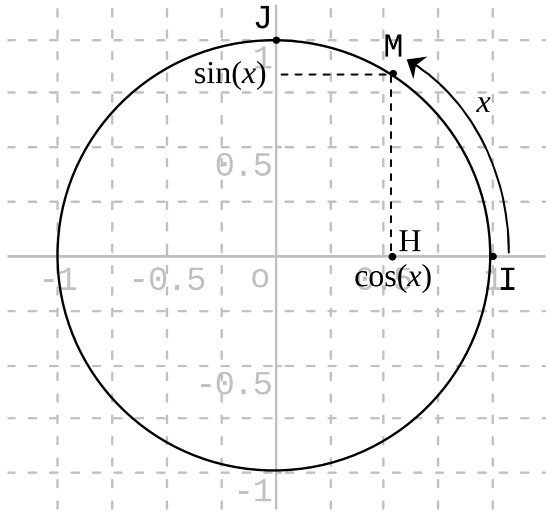
SUJET A

Exercice n° 1 (question de cours) – 3 points



1. Voir figure ci-contre.
2. Puisque les points M et H ont la même abscisse, la droite (MH) est perpendiculaire à l'axe des abscisses, ce qui rend le triangle OHM rectangle en H.

   Dans notre cas, OH = $\cos(x)$, HM = $\sin(x)$ et OM = 1 car c'est un rayon du cercle trigonométrique.

   La relation de Pythagore s'applique, donnant alors :
   $$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Exercice n° 2 (fonctions carré et affine) – 7 points

1. Rappelons que la fonction carré est décroissante (resp. croissante) sur $]-\infty\,;\,0]$ (resp $[0\,;\,+\infty[$), donc lorsqu'on applique la fonction carré à une inégalité dont les nombres sont négatifs (resp. positifs), le sens change (resp. ne change pas) :
   a) $1 \leqslant x \leqslant 3 \quad\Rightarrow\quad 1 \leqslant x^2 \leqslant 9$
   b) $-3 \leqslant x \leqslant -2 \quad\Rightarrow\quad 4 \leqslant x^2 \leqslant 9$
   c) $-1 \leqslant x \leqslant 3 \quad\Rightarrow\quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 9$
   d) $-2 \leqslant x \leqslant 2 \quad\Rightarrow\quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

2. VRAI ou FAUX ?? On ne donnera un contre-exemple que dans le cas « FAUX ».

Proposition	V / F	Contre-exemple
Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$	V	
Si $a^2 \leqslant 5$, alors $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{5}$	F	$a = -1$
Si $a \leqslant 0 \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$	F	$a = -3$ et $b = 2$
Si $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$, alors $b \leqslant a \leqslant 0$	F	$a = 1$ et $b = 2$

3. Soit $\mathscr{D}$ la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = x + 2$.
   a) Voir figure.
   b) Graphiquement les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$, sont –1 et 2.
   c) Il s'agit donc de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $f(x) = x^2$:

      (E) $\Leftrightarrow x^2 - f(x) = 0$
      (E) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

      A ce stade, on constate que –1 est solution de cette équation. Par conséquent, le premier membre se factorise par $(x - (-1))$, c'est-à-dire $(x + 1)$, donc :

      (E) $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$ (il suffit de « développer » pour trouver le 2)
      (E) $\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$
      (E) $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

      Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont donc bien –1 et 2.

Exercice n° 3 (fonctions cosinus et sinus) – 4 points

1. OUI, il existe une valeur x de $\mathbb{R}$ telle que $\cos(x) = \sin(x)$, il s'agit de $x = \frac{\pi}{4}$.
2. OUI, il existe une valeur x de $\mathbb{R}$ telle que $\cos(x) = -\sin(x)$, il s'agit de $x = -\frac{\pi}{4}$.

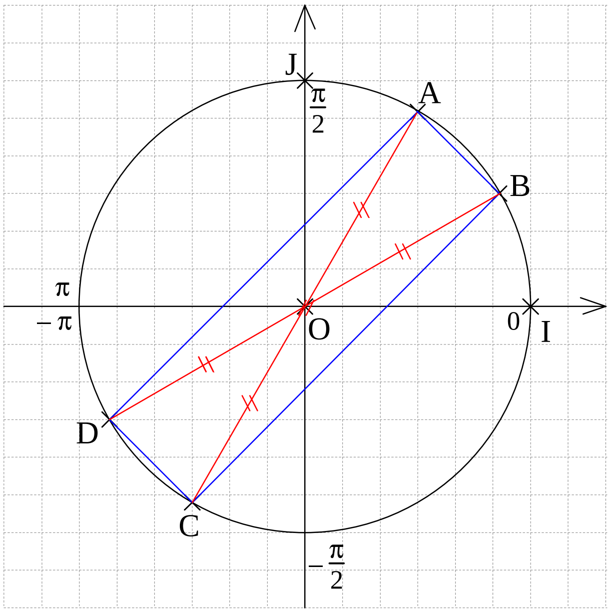
regarder sur le cercle page 1 pour s'en convaincre…

3. Soit x un réel. On a vu dans le cours que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. On sait aussi qu'on peut additionner membre à membre des inégalités qui sont dans le même sens (forcément !), donc
$$-1 + (-1) \leqslant \cos(x) + \sin(x) \leqslant 1 + 1,$$
c'est-à-dire $-2 \leqslant \cos(x) + \sin(x) \leqslant 2$.

4. Si $\sin(x) = 0$, alors on a nécessairement que x est un multiple de π (0, π, 2π, -2007π, …). Mais dans ce cas, le $\cos(x)$ vaut toujours 1 ou –1, mais jamais 0. On en déduit qu'il n'existe PAS de valeur réelle de x telle que $\cos(x) = \sin(x) = 0$.

Exercice n° 4 (dans un cercle) – 6 points – Tous les angles dont donnés en radians.

1. Voici la figure :



2. Avant de construire les points, on remarque que :
$$\widehat{IOA} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \widehat{IOB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{IOA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad ;$$
$$\widehat{IOC} = \frac{\pi}{3} + 2007\pi = \frac{\pi}{3} + \pi + 1003 \times (2\pi) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \quad ; \quad \widehat{IOD} = -\frac{5\pi}{6}.$$

3. On connaît les cosinus et sinus des valeurs remarquables suivantes : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π. Alors on en déduit facilement que :
$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$
Les coordonnées de C (resp. D) sont les opposées de celles de A (resp. B), donc A et C sont symétriques par rapport à O, ainsi que B et D.

4. Par cette symétrie, on peut dire que O est le milieu de [AC] et [BD], et de plus, puisque A, B, C et D sont quatre points se trouvant sur le cercle, on a OA = OB = OC = OD. On en déduit donc que [AC] et [BD] sont deux diagonales qui ont même longueur et se coupent eu leur milieu :

   ABCD est un rectangle.

5. Par définition, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en radians. Or :

$$\widehat{AOB} = \widehat{IOA} - \widehat{IOB} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

   L'arc $\overset{\frown}{AB}$ mesure donc $\frac{\pi}{6}$ unités, c'est-à-dire $3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ cm, car l'unité graphique est de 3 cm.

Question bonus - 1 point : Soit (E) l'équation $\cos(x) + \sin(x) = \pm 1$. Aors
(E) $\Leftrightarrow [\cos(x) + \sin(x)]2 = (\pm 1)2 \Leftrightarrow \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow 2\cos(x)\sin(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 0$ ou $x = \pi$.

$$\mathscr{S} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$$

Figure

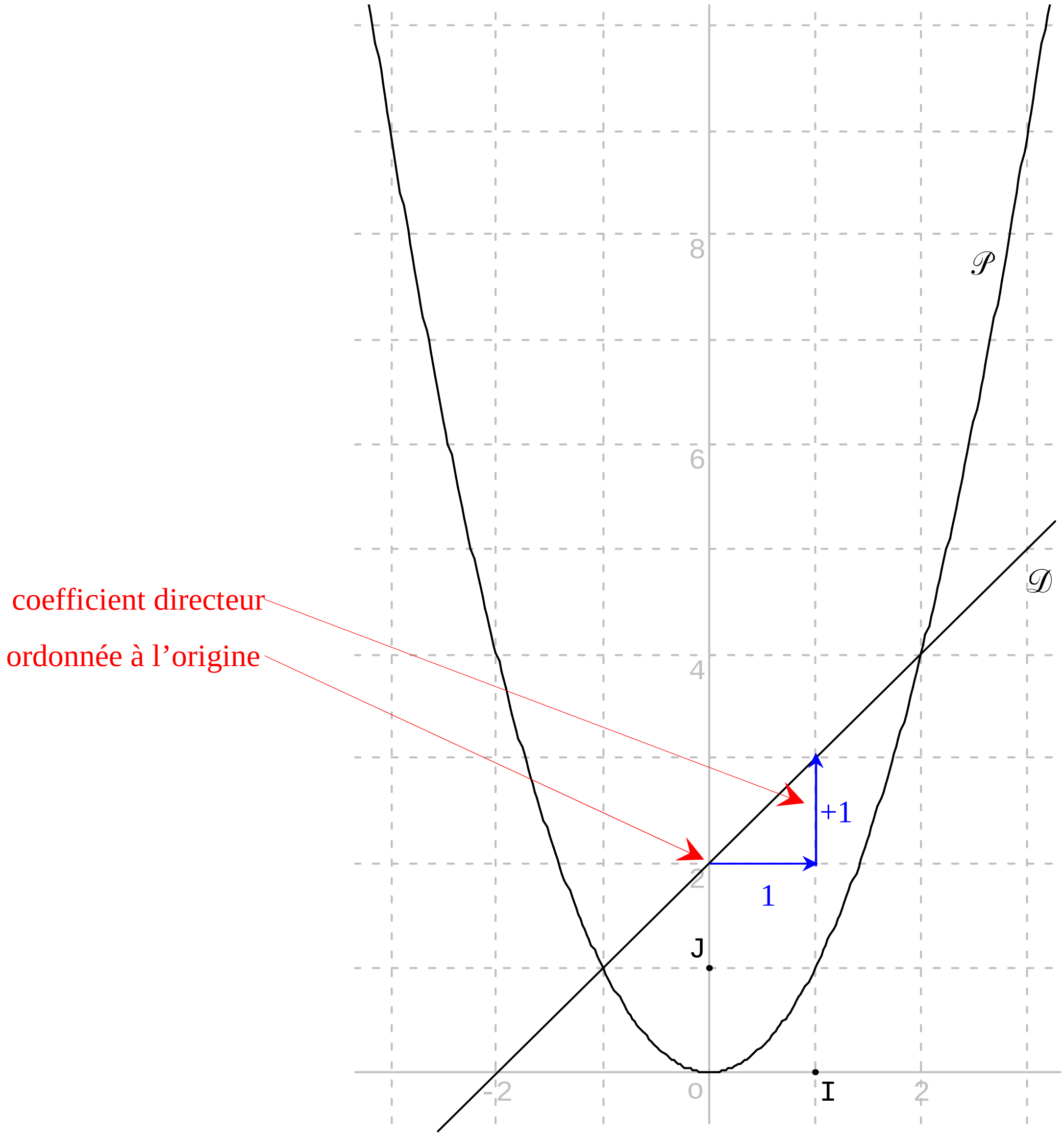


Figure de l'exercice 2

SUJET B

Exercice n° 1 (fonctions inverse et affine) – 7 points

1. Recopier et compléter les implications suivantes :

a) $1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$

b) $-3 \leqslant x \leqslant -2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{3}$

c) $0{,}1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 10$

d) $0 < x \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \in [1/2\ ;\ +\infty[$

2. VRAI ou FAUX ?? On ne donnera un contre-exemple que dans le cas « FAUX ».

Proposition	V / F	Contre-exemple
Si $0 < a \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$	F	$a = 2$ et $b = 4$
Si $0 < a \leqslant b$, alors $-\frac{1}{a} \leqslant -\frac{1}{b}$	V	
Si $a \leqslant 0 \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$	V	
Si $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, alors $0 > a > b$	F	$a = 4$ et $b = 2$

3. Soit $\mathscr{D}$ la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = 2x + 1$.

a) Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique ci-contre.

b) Graphiquement, les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{H}$ sont -1 et $\frac{1}{2}$.

c) Il s'agit de résoudre l'équation (E) : $f(x) = \frac{1}{x}$

(E) $\Leftrightarrow x\,(2x + 1) = 1$
(E) $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$.

A ce stade, on constate que -1 est solution de cette équation. Par conséquent, le premier membre se factorise par $(x - (-1))$, c'est-à-dire $(x + 1)$, donc :
(E) $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1/2) = 0$ (il suffit de « développer » pour trouver le 1/2)
(E) $\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 1/2 = 0$
(E) $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1/2$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont donc bien -1 et $\frac{1}{2}$.

Exercice n° 2 (fonctions cosinus et sinus) – 4 points

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(x) \times [\cos^2(x) + \sin^2(x)] = \cos^3(x) + \cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) + \cos(x)\,[1 - \cos^2(x)]$$
$$= \cos^3(x) + \cos(x) - \cos^3(x) = \cos(x).$$

On en déduit que $\cos(x) \times [\cos^2(x) + \sin^2(x)] = \cos(x)$, c'est-à-dire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

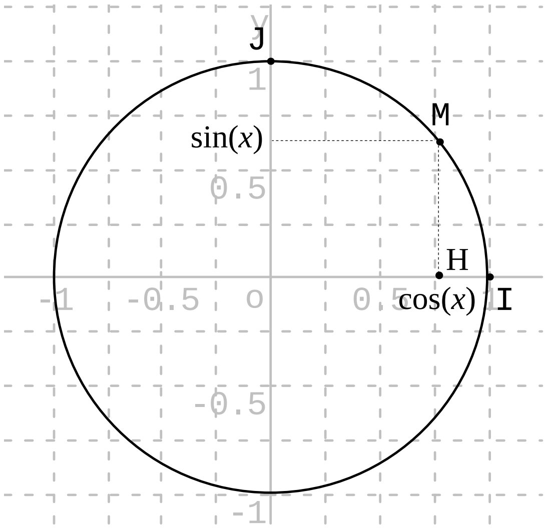
2. Soit x un réel. On a vu dans le cours que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. On sait qu'en multipliant une inégalité par -1, le sens change, donc $1 \geqslant -\sin(x) \geqslant -1$, c'est-à-dire $-1 \leqslant -\sin(x) \leqslant$

1. On sait aussi qu'on peut additionner membre à membre des inégalités qui sont dans le même sens (forcément !), donc

$$-1 + (-1) \leqslant \cos(x) - \sin(x) \leqslant 1 + 1,$$

c'est-à-dire $-2 \leqslant \cos(x) - \sin(x) \leqslant 2$.

3. Les valeurs pour lesquelles $\cos(x) = 1$ sont tous les multiples de 2π (0, 2π, 4π, 2006π, -30π, …). Or pour ces mêmes valeurs, le $\sin(x)$ vaut toujours 0, et jamais 1. Par conséquent, il n'existe pas de valeur de x telle que $\cos(x) = \sin(x) = 1$.



Exercice n° 3 (question de cours) – 3 points

1. Voir figure ci-contre.
2. Puisque les points M et H ont la même abscisse, la droite (MH) est perpendiculaire à l'axe des abscisses, ce qui rend le triangle OHM rectangle en H.

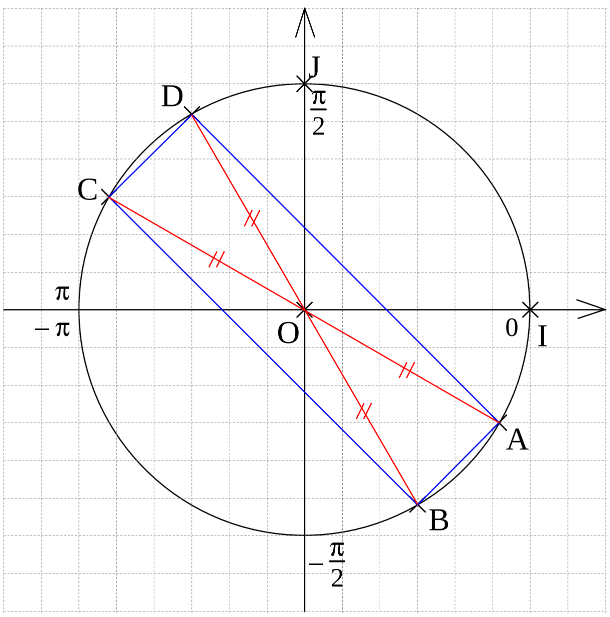
   Dans notre cas, $OH = \cos(x)$, $HM = \sin(x)$ et $OM = 1$ car c'est un rayon du cercle trigonométrique.

   La relation de Pythagore s'applique, donnant alors :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Exercice n° 4 (dans un cercle) – 6 points – Tous les angles dont donnés en radians.

1. Voici la figure :



H

2. Avant de construire les points, remarquons que :

$$\widehat{IOA} = -\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \widehat{IOB} = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \widehat{IOC} = \pi + \widehat{IOA} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\widehat{IOD} = -\frac{\pi}{3} - 2007\pi = -\frac{\pi}{3} - \pi - 1003 \times (2\pi) = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3}.$$

3. On connaît les cosinus et sinus des valeurs remarquables suivantes : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π. Alors on en déduit facilement que :

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Les coordonnées de C (resp. D) sont les opposées de celles de A (resp. B), donc A et C sont symétriques par rapport à O, ainsi que B et D.

4. Par cette symétrie, on peut dire que O est le milieu de [AC] et [BD], et de plus, puisque A, B, C et D sont quatre points se trouvant sur le cercle, on a OA = OB = OC = OD. On en déduit donc que [AC] et [BD] sont deux diagonales qui ont même longueur et se coupent eu leur milieu :

ABCD est un rectangle.

5. Par définition, la longueur de l'arc $\widehat{BA}$ est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en radians. Or :

$$\widehat{AOB} = \widehat{IOA} - \widehat{IOB} = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

L'arc $\widehat{BA}$ mesure donc $\frac{\pi}{6}$ unités, c'est-à-dire $3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ cm, car l'unité graphique est de 3 cm.

Question bonus - 1 point : Soit (E) l'équation $\cos(x) + \sin(x) = \pm 1$. Aors

(E) $\Leftrightarrow [\cos(x) + \sin(x)]2 = (\pm 1)2 \Leftrightarrow \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow 2\cos(x)\sin(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 0$ ou $x = \pi$.

$$\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$$

Figure

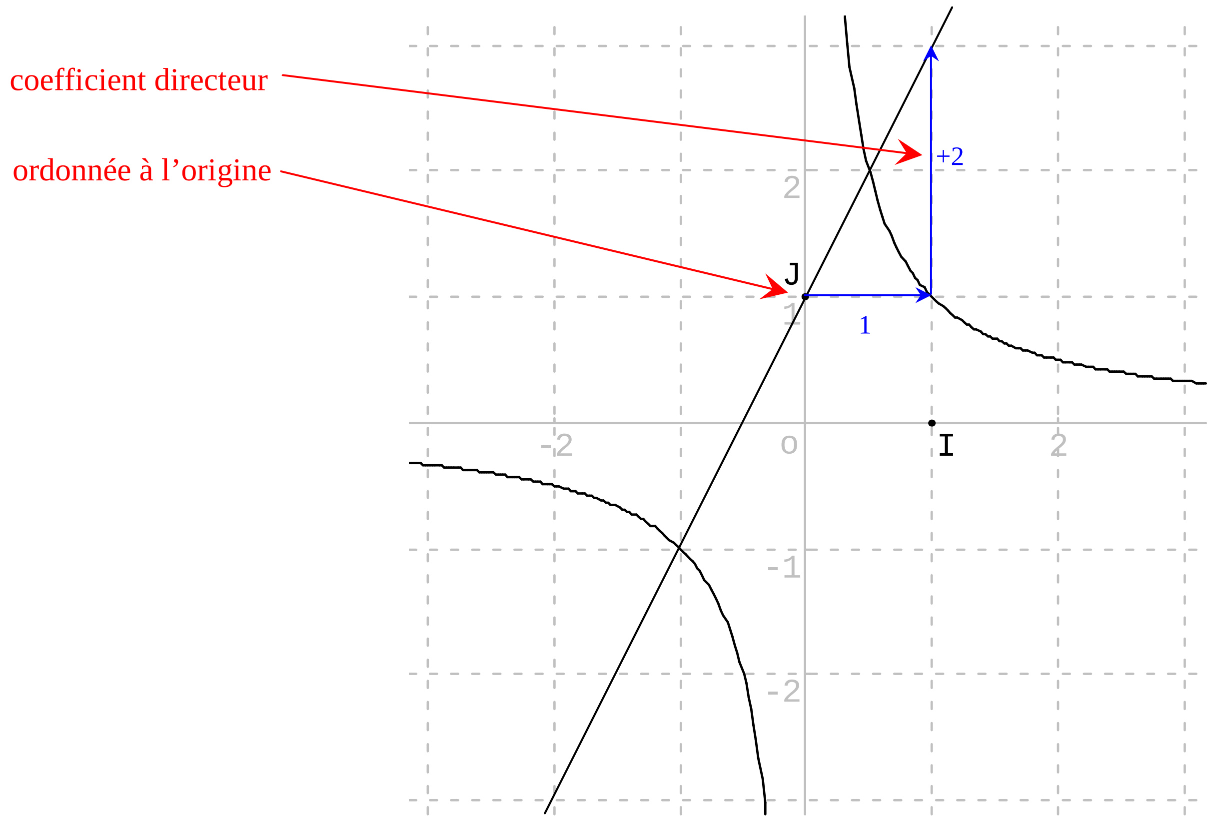


Figure de l'exercice 1