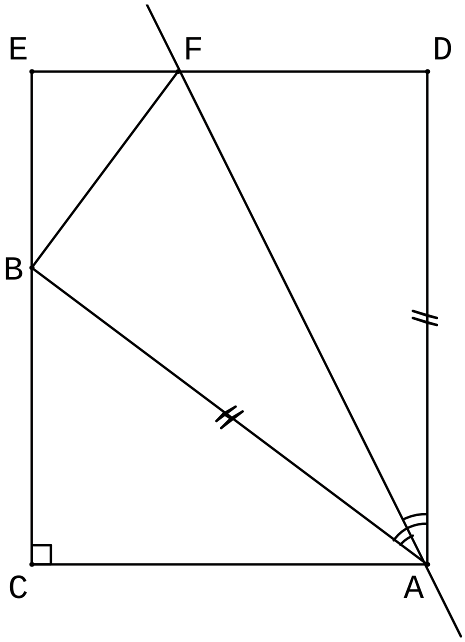
## Exercice n° 1 (autour du théorème de Pythagore) – 6 points

1. Faisons une figure :




2. Puisque ABC est rectangle en C, et que $a$ = BC, $b$ = AC et $c$ = AB, la relation de Pythagore dans ce triangle s'écrit :

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

3. AB = AD et $\widehat{\text{FAB}} = \widehat{\text{FAD}}$ par hypothèse, donc dans le triangle FAB, on a $\tan(\widehat{\text{FAB}}) = \dfrac{\text{BF}}{\text{AB}}$. Dans le triangle FAD, on a donc $\tan(\widehat{\text{FAD}}) = \dfrac{\text{DF}}{\text{AD}} = \dfrac{\text{DF}}{\text{AB}}$. Or $\tan(\widehat{\text{FAB}}) = \tan(\widehat{\text{FAD}})$, donc $\dfrac{\text{BF}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{DF}}{\text{AB}}$, c'est-à-dire BF = DF. D'après le premier critère d'isométrie, on en déduit que

   $\boxed{\text{ces deux triangles ABF et ADF sont semblables}}$.

   Dans ce cas, $\widehat{\text{ABF}} = 90°$, car $\widehat{\text{ADF}} = 90°$ (angle d'un rectangle).

4. $\widehat{\text{EBF}} = 180 - \widehat{\text{ABF}} - \widehat{\text{ABC}} = 90 - \widehat{\text{ABC}} = \widehat{\text{CAB}}$. Puisque $\widehat{\text{BEF}} = 90°$, on aura nécessairement $\widehat{\text{EFB}} = 90 - \widehat{\text{EBF}} = 90 - \widehat{\text{CAB}} = \widehat{\text{CBA}}$. Par définition, on en déduit que

   $\boxed{\text{les triangles ABC et BFE sont semblables}}$.

5. $\tan(\widehat{\text{FBE}}) = \dfrac{\text{EF}}{\text{EB}} = \dfrac{x}{(c-a)}$ ; $\tan(\widehat{\text{BAC}}) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AC}} = \dfrac{a}{b}$ ; $\sin(\widehat{\text{FBE}}) = \dfrac{\text{EF}}{\text{FB}} = \dfrac{x}{b-x}$ ; $\sin(\widehat{\text{BAC}}) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}} = \dfrac{a}{c}$.

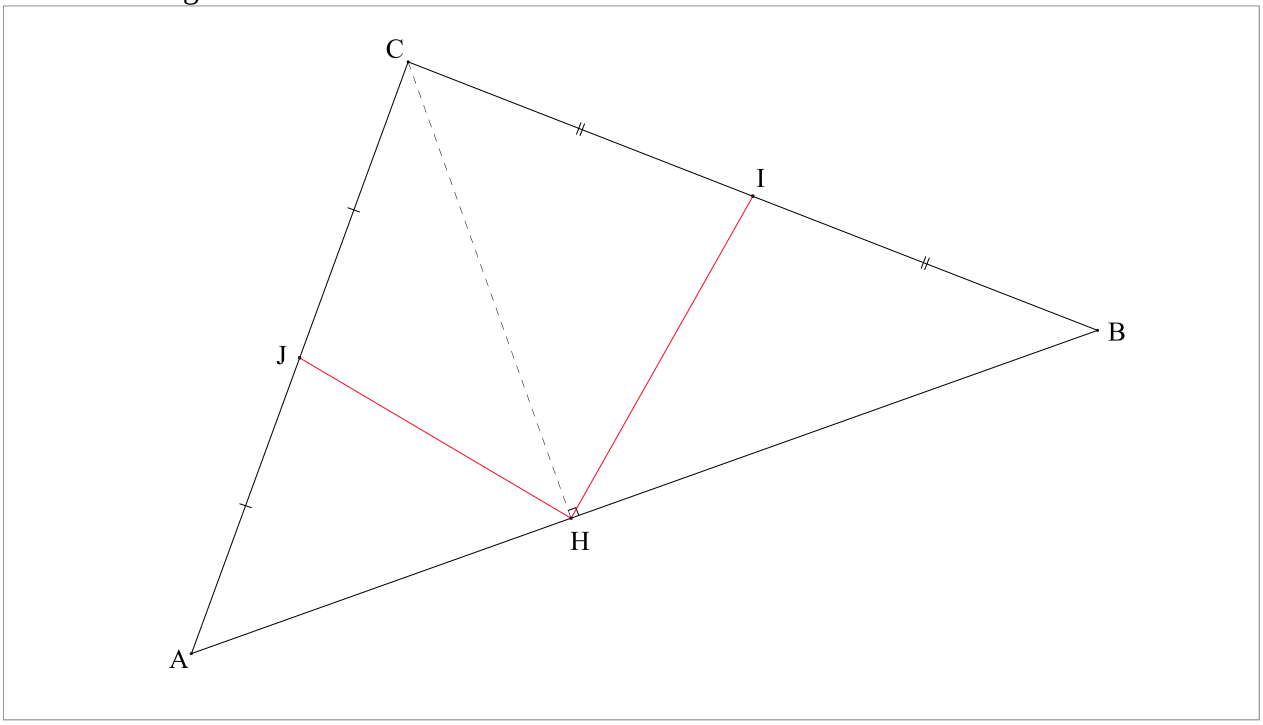
6. * $\tan(\widehat{\text{FBE}}) = \tan(\widehat{\text{BAC}}) \Leftrightarrow \dfrac{x}{(c-a)} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\,(c-a)}{b}$

   * $\sin(\widehat{\text{FBE}}) = \sin(\widehat{\text{BAC}}) \Leftrightarrow \dfrac{x}{b-x} = \dfrac{a}{c} \Leftrightarrow cx = a\,(b-x) \Leftrightarrow x\,(c+a) = ab \Leftrightarrow x = \dfrac{ab}{c+a}$

   * D'où $\dfrac{a\,(c-a)}{b} = \dfrac{ab}{c+a} \Leftrightarrow (ac-a^2)(c+a) = ab^2 \Leftrightarrow (c-a)(c+a) = b^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 = b^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$. On a ainsi démontré le théorème de Pythagore.

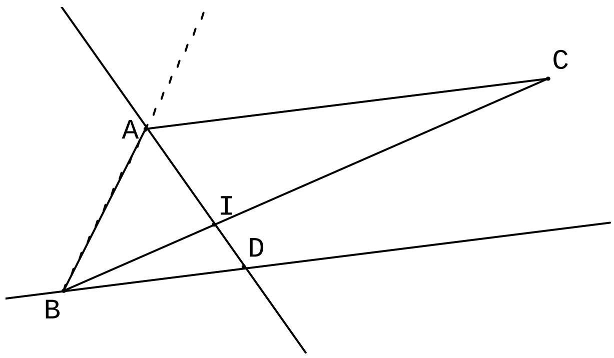
## Exercice n° 2 (dans un triangle…) – 6 points

1. Faisons une figure :




2. Puisque H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC, le triangle BHC est rectangle en H. Par théorème, H appartient au centre dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle, soit [BC]. Par conséquent, I étant le milieu de [BC], on a IC = IB = IH, donc BC = 2 × IH.
3. De même, le triangle AHC est rectangle en H, donc H est sur le cercle de diamètre [AC], et par suite, AC = 2 × JH.
4. Puisque I est le milieu de [BC] et J celui de [AC], le théorème des milieux nous permet d'affirmer non seulement que (IJ) // (AB) mais aussi que AB = 2 × IJ.
5. Les triangles ABC et IJH sont donc semblables d'après le cas n° 1. En effet, leurs côtés sont respectivement de longueurs parallèles.
6. Le sommet homologue de C est H, et donc $\widehat{BCA} = \widehat{IHJ}$.

## Exercice n° 4 (dans un autre triangle…) – 3 points

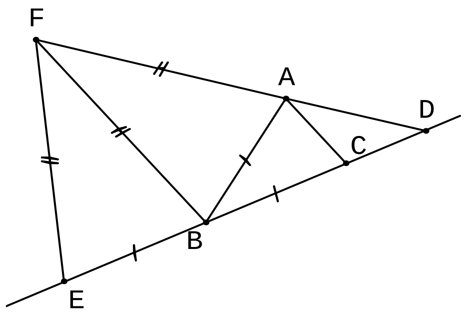



1. $\widehat{CAD} = \widehat{BDA}$ car ces angles sont alternes-internes (on rappelle que (AC) // (BD) par hypothèse). De plus, (AD) étant la bissectrice de $\widehat{A}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, donc $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$, et le triangle ABD est bien isocèle en B.
2. C'est le cas n° 4, car leurs côtés sont deux à deux parallèles (deux droites confondues sont évidemment parallèles !) : les triangles IAC et IDB sont semblables.
3. On en déduit que $\frac{IB}{IC} = \frac{BD}{AC}$, et puisque ABD est isocèle en B, l'égalité BD = AB implique alors que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

4. Soit H le pied de la hauteur issue de A (que ce soit dans le triangle IAB ou IAC, c'est la même !).

Alors $\dfrac{\mathscr{A}(\text{IAB})}{\mathscr{A}(\text{IAC})} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \text{AH} \times \text{IB}}{\frac{1}{2} \times \text{AH} \times \text{IC}} = \dfrac{\text{IB}}{\text{IC}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$. Il est utile de rappeler ici que puisque nous ne travaillons plus dans les triangles semblables IAC et IDB, il n'y a pas de raisons que le rapport des deux aires s'exprime sous la forme d'un carré d'un quelconque rapport de similitude !!!

## Exercice n° 4 (dans un dernier triangle…) – 5 points




D'après le codage de la figure, les triangles FEB et FBA sont isométriques. Donc, dans le triangle ABC, on a $\widehat{\text{ABC}} = 180 - \widehat{\text{EBF}} - \widehat{\text{FBA}} = 180 - 2\,\widehat{\text{FBA}}$. Or, dans le triangle FAB isocèle en F, on a aussi que $\widehat{\text{AFB}} = 180 - \widehat{\text{FBA}} - \widehat{\text{FAB}} = 180 - 2\,\widehat{\text{FBA}}$. Par conséquent, les angles $\widehat{\text{ABC}}$ et $\widehat{\text{AFB}}$ sont égaux. A nouveau, d'après le codage et d'après le cas n° 3, les triangles FAB et BAC sont semblables.

On a donc en particulier que $\dfrac{\text{AC}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AF}}$, ce qui est équivalent à $\dfrac{\text{AC}}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, d'où AC = 1.

Enfin, dans le triangle ACD, on a $\widehat{\text{CAD}} = 180 - \widehat{\text{BAC}} - \widehat{\text{FAB}} = 180 - 2\,\widehat{\text{FBA}}$. Les droites (AC) et (FB) sont donc parallèles, et le théorème de Thalès nous donne

$$\frac{\text{DC}}{\text{DB}} = \frac{\text{AC}}{\text{FB}} \Leftrightarrow \frac{\text{DC}}{\text{DC} + 2} = 1 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\ \text{DC} = (\text{DC} + 2) \Leftrightarrow$$

$$3\ \text{DC} = 2 \Leftrightarrow \text{DC} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}6667.$$

D'où ED = EB + BC + CD = 2 + 2 + 0,6667 = 4,6667.