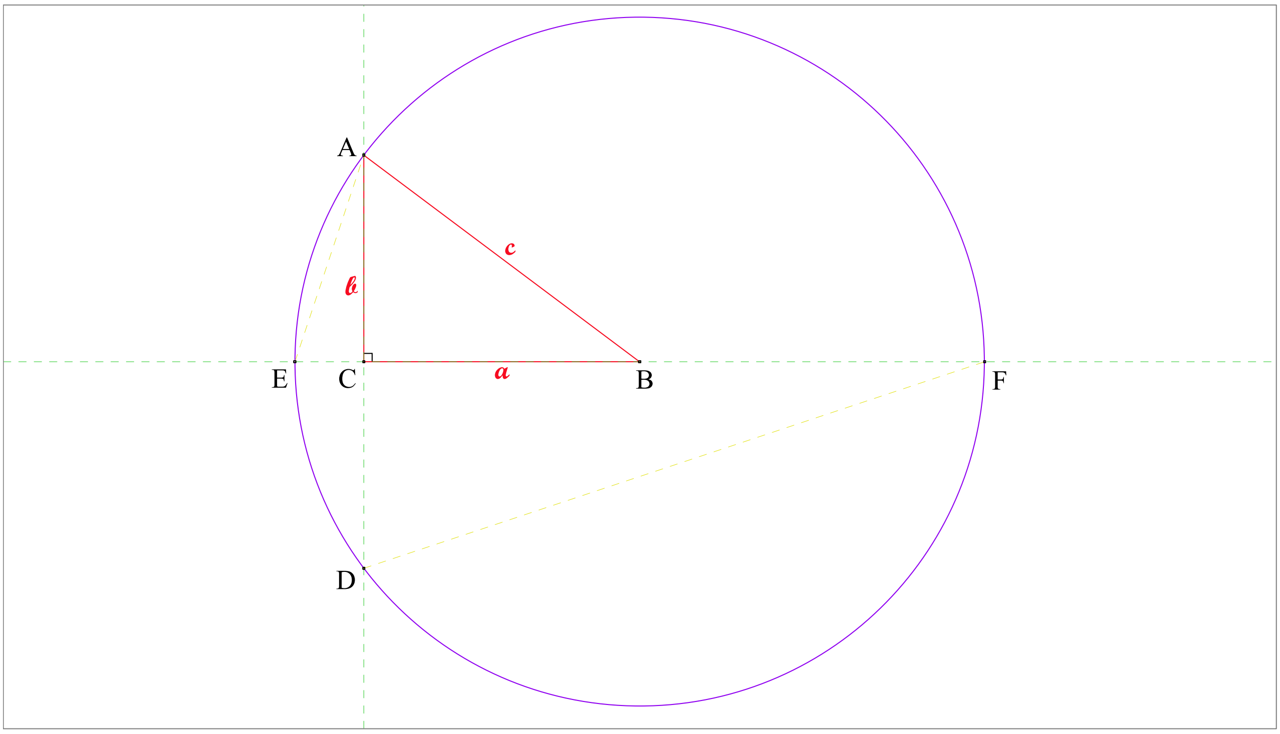
Exercice n° 1 (autour du théorème de Pythagore) – 5 points

1. Faisons une figure :



2. Puisque ABC est rectangle en C, et que a = BC, b = AC et c = AB, la relation de Pythagore dans ce triangle s'écrit :

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

3. $\widehat{ACE}$ et $\widehat{DCF}$ sont deux angles droits car $\widehat{ABC}$ en est un par hypothèse. De plus, par le théorème de l'angle inscrit, puisque les points A et F interceptent le même arc $\overset{\frown}{ED}$ et que tous ces points se trouvent sur le même cercle de centre B passant par A, on a $\widehat{EAD} = \widehat{EFD}$, c'est-à-dire $\widehat{EAC} = \widehat{CFD}$. Enfin, puisque la somme des angles d'un triangle vaut toujours 180°, on en déduit que $\widehat{CDF} = \widehat{AEC}$. Les trois angles respectifs des triangles CDF et CEA sont de même mesure, on en déduit par définition que

$$\boxed{\text{ces deux triangles CDF et CEA sont semblables}}.$$

4. D'après une propriété du cours, les rapports côtés homologues de deux triangles semblables sont égaux, d'où

$$\boxed{\frac{\text{CF}}{\text{CA}} = \frac{\text{CD}}{\text{CE}}},$$

et le produit en croix donne alors

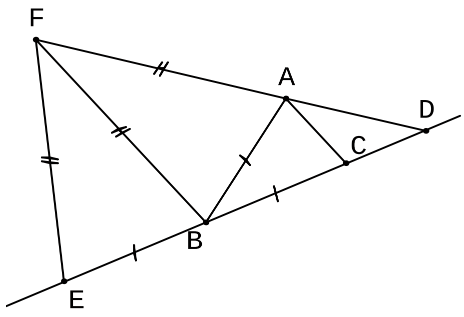
$$\boxed{\text{CF} \times \text{CE} = \text{CA} \times \text{CD}}.$$

5. CF = CB + BF = $a + c$; CE = EB – CB = $c - a$; CA = b et CD = b (car D est le symétrique de A par rapport à (CB), donc [CA] et [CD] ont la même longueur). L'égalité précédente devient alors :

$$\boxed{(a + c)(c - a) = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 - a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2}.$$

On a ainsi démontré le théorème de Pythagore.

Exercice n° 2 (dans un triangle) – 5 points



D'après le codage de la figure, les triangles FEB et FBA sont isométriques. Donc, dans le triangle ABC, on a $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{EBF} - \widehat{FBA} = 180 - 2\,\widehat{FBA}$. Or, dans le triangle FAB isocèle en F, on a aussi que $\widehat{AFB} = 180 - \widehat{FBA} - \widehat{FAB} = 180 - 2\,\widehat{FBA}$. Par conséquent, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AFB}$ sont égaux. A nouveau, d'après le codage et d'après le cas n° 3, les triangles FAB et BAC sont semblables.

On a donc en particulier que $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AF}$, ce qui est équivalent à $\frac{AC}{3} = \frac{3}{5}$, d'où $AC = \frac{9}{5}$.

Enfin, dans le triangle ACD, on a $\widehat{CAD} = 180 - \widehat{BAC} - \widehat{FAB} = 180 - 2\,\widehat{FBA}$. Les droites (AC) et (FB) sont donc parallèles, et le théorème de Thalès nous donne

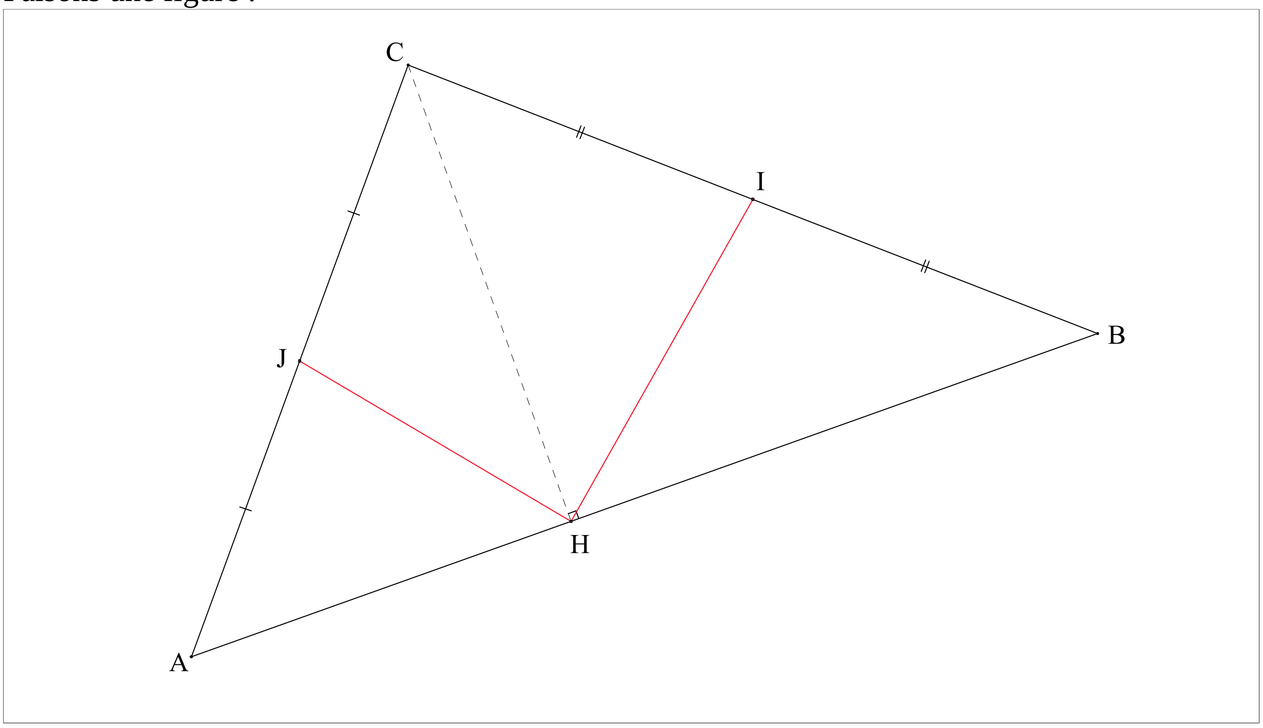
$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{FB} \Leftrightarrow \frac{DC}{DC+3} = \frac{9}{5} \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow DC = \frac{9}{25}(DC+3) \Leftrightarrow$$

$$DC\left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{27}{25} \Leftrightarrow DC = \frac{27}{25} \times \frac{25}{16} = \frac{27}{16} = 1{,}6875.$$

D'où ED = EB + BC + CD = 3 + 3 + 1,6875 = 10,6875.

Exercice n° 3 (dans un autre triangle…) – 6 points

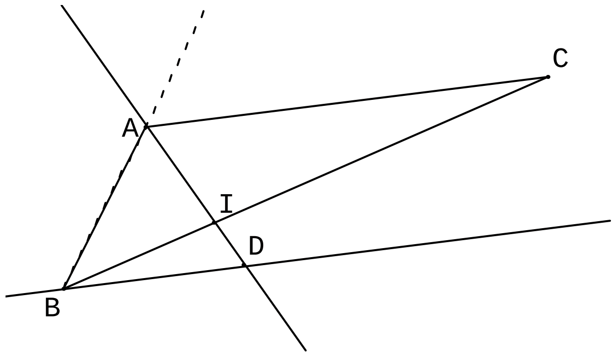
1. Faisons une figure :



2. Puisque H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC, le triangle BHC est rectangle en H. Par théorème, H appartient au centre dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle, soit [BC]. Par conséquent, I étant le milieu de [BC], on a IC = IB = IH, donc BC = 2 × IH.
3. De même, le triangle AHC est rectangle en H, donc H est sur le cercle de diamètre [AC], et par suite, AC = 2 × JH.

4. Puisque I est le milieu de [BC] et J celui de [AC], le théorème des milieux nous permet d'affirmer non seulement que (IJ) // (AB) mais aussi que AB = $2 \times$ IJ.
5. Les triangles ABC et IJH sont donc semblables d'après le cas n° 1. En effet, leurs côtés sont respectivement de longueurs parallèles.
6. Le sommet homologue de C est H, et donc $\widehat{BCA} = \widehat{IHJ}$.

Exercice n° 4 (et encore dans un autre triangle…) – 4 points



1. $\widehat{CAD} = \widehat{BDA}$ car ces angles sont alternes-internes (on rappelle que (AC) // (BD) par hypothèse). De plus, (AD) étant la bissectrice de $\widehat{A}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, donc $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$, et le triangle ABD est bien isocèle en B.
2. C'est le cas n° 4, car leurs côtés sont deux à deux parallèles (deux droites confondues sont évidemment parallèles !) : les triangles IAC et IDB sont semblables.
3. On en déduit que $\frac{IB}{IC} = \frac{BD}{AC}$, et puisque ABD est isocèle en B, l'égalité BD = AB implique alors que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.
4. Soit H le pied de la hauteur issue de A (que ce soit dans le triangle IAB ou IAC, c'est la même !). Alors $\frac{\mathscr{A}(IAB)}{\mathscr{A}(IAC)} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times IB}{\frac{1}{2} \times AH \times IC} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$. Il est utile de rappeler ici que puisque nous ne travaillons plus dans les triangles semblables IAC et IDB, il n'y a pas de raisons que le rapport des deux aires s'exprime sous la forme d'un carré d'un quelconque rapport de similitude !!!