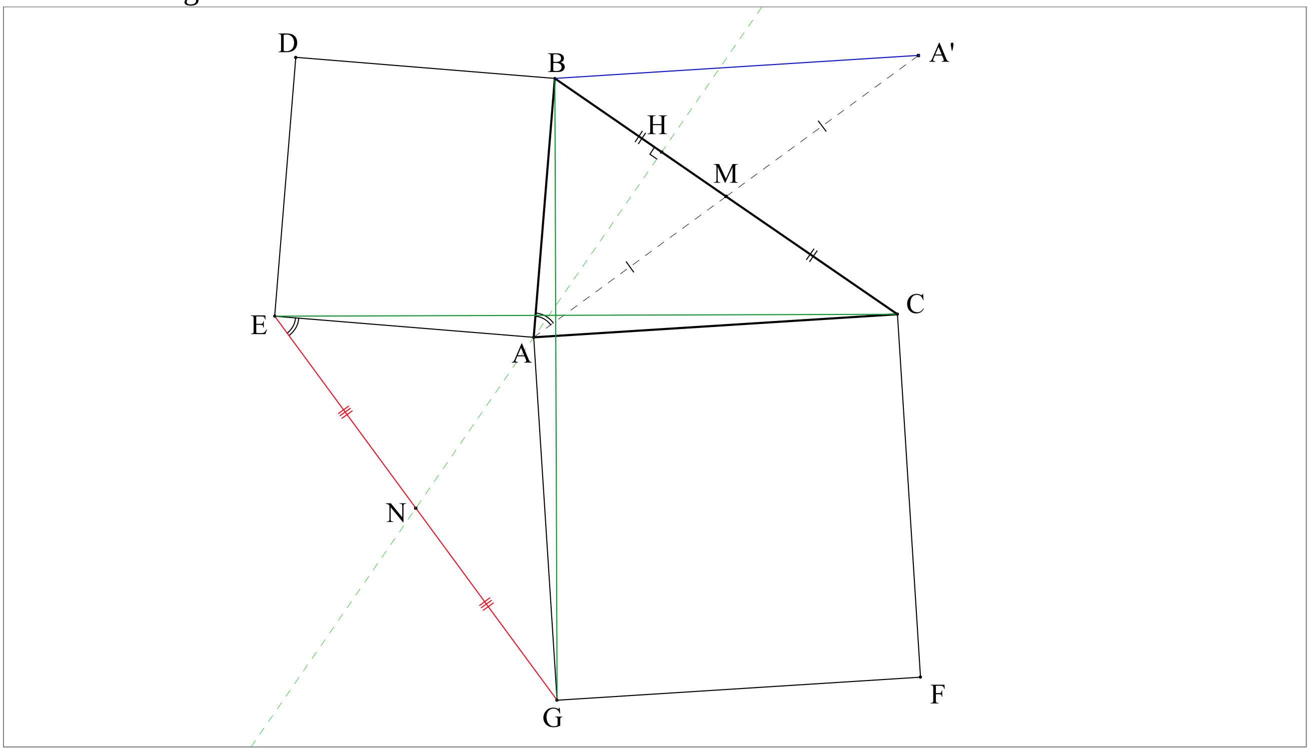
Exercice n° 1 – 6 points

1. Faisons une figure :



2. Puisque ABDE et ACFG sont des carrés, on a les relations AB = AE et AC = AG. De plus, nous avons aussi que $\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = \widehat{BAC} + 90° = \widehat{BAC} + \widehat{CAG} = \widehat{BAG}$. Donc d'après le critère d'isométrie n° 2, les triangles EAC et BAG sont isométriques, d'où EC = BG.

3. * ABA'C est un parallélogramme par construction (en effet, ses diagonales se coupent en leur milieu commun M), d'où BA' = AC. Mais ACFG est un carré, donc AC = AG. On en déduit que BA' = AG.
   * ABDE étant un carré, on a aussi AB = EA.
   * Nous remarquons ensuite que $\widehat{ABA'} = \widehat{ABC} + \widehat{CBA'} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180° - \widehat{BAC}$ (en effet, $\widehat{CBA'}$ et $\widehat{BCA}$ sont alternes-internes, et la dernière égalité provient du fait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°). Or $\widehat{EAG} + \widehat{GAC} + \widehat{CAB} + \widehat{BAE} = 360° \Leftrightarrow \widehat{EAG} + 90° + \widehat{CAB} + 90° = 360° \Leftrightarrow \widehat{EAG} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{ABA'}$ d'après ce qui précède.
   * Les trois conditions bleues nous permettent d'utiliser à nouveau le critère d'isométrie n° 2 pour conclure que les triangles EAG et ABA' sont isométriques.

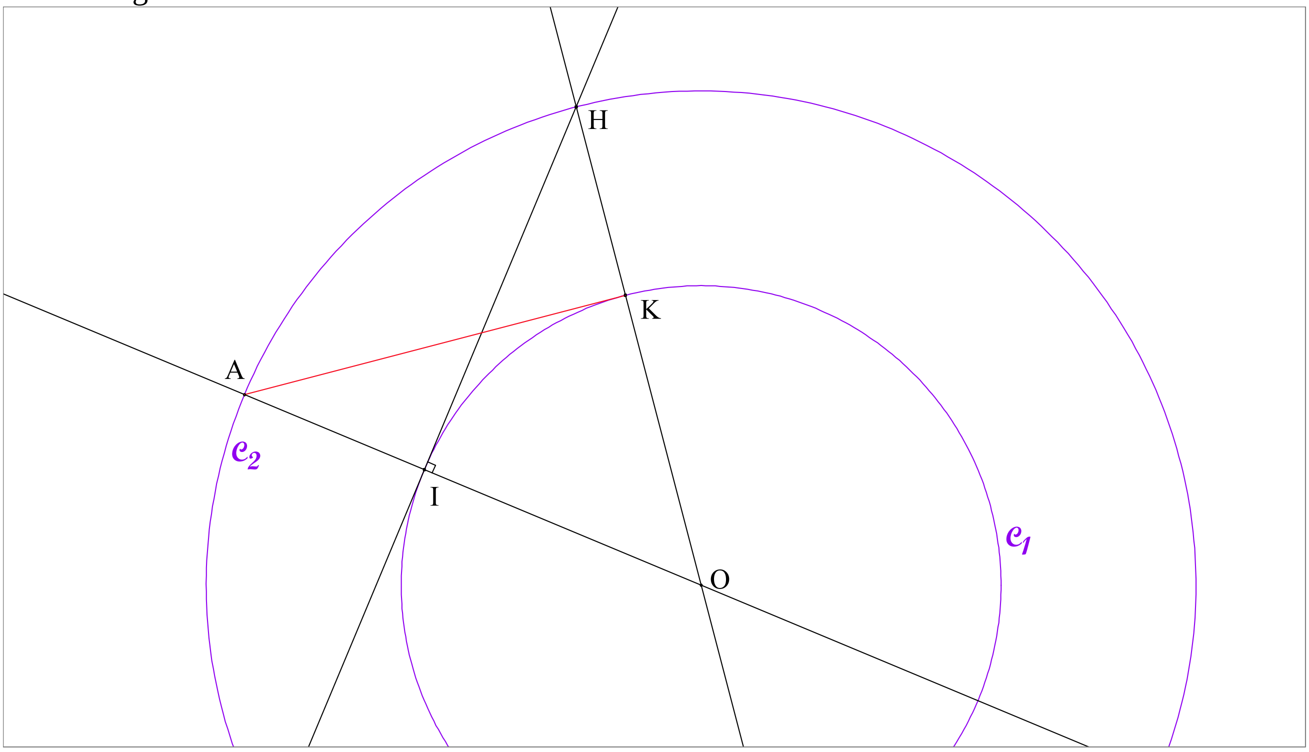
4. Puisque les triangles EAG et ABA' sont isométriques, on a aussi EG = AA', et comme M est le milieu du segment [AA'], on en déduit que EG = 2AM.

5. a) ABDE étant un carré, EA = AB. De plus, EN = $\frac{1}{2}$ EG = AM, car N est le milieu de [EG] et d'après ce qui précède. Enfin, $\widehat{AEN} = \widehat{AEG} = \widehat{BAA'} = \widehat{BAM}$ car les triangles EAG et ABA' sont isométriques. On en déduit, toujours pas le second critère d'isométrie, que les triangles AEN et BAM sont isométriques.

   b) $\widehat{NAH} = \widehat{NAE} + \widehat{EAB} + \widehat{BAM} = \widehat{MBA} + \widehat{EAB} + \widehat{BAM} = \widehat{HBA} + \widehat{AHB} + \widehat{BAH} = 180°$. Les points A, N et H sont donc alignés.

Exercice n° 2 − 3 points

Voici la figure demandée :



1. HO = AO car ce sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}_2$. De même, OK = OI car ce sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}_1$. Enfin, les angles $\widehat{\text{IOH}}$ et $\widehat{\text{KOA}}$ sont les même car les points O, I, A sont alignés, de même que les points O, K, H. On en déduit, toujours et encore par le second critère d'isométrie, que les triangles HIO et AKO sont isométriques.

2. D'après la question précédente, et puisque $\widehat{\text{OIH}} = 90°$, on a $\widehat{\text{OKA}} = 90°$, ce qui prouve que (KA) ⊥ (OK), c'est-à-dire que (KA) est la tangente en K au cercle $\mathscr{C}_1$.

3. On a OI = OK et OA = OH. Par suite, OI = OK $\Leftrightarrow \dfrac{\text{OI}}{\text{OA}} = \dfrac{\text{OK}}{\text{OA}} \Leftrightarrow \dfrac{\text{OI}}{\text{OA}} = \dfrac{\text{OK}}{\text{OH}}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que (AH) // (IK).

Exercice n° 3– 10 points

– Partie I –

Première égalité :
D'après le codage de la figure, le triangle BHC est rectangle en H, donc

$$a^2 = m^2 + h^2. \qquad (1)$$

Deuxième égalité :
D'après la figure, $m = b - n$, donc $m^2 = (b - n)^2 = b^2 - 2bn + n^2$. En remplaçant ce résultat dans (1), on trouve que :

$$a^2 = b^2 - 2bn + n^2 + h^2. \qquad (2)$$

Troisième égalité :
Toujours d'après le codage de la figure, le triangle BHA est rectangle en H, donc $c^2 = n^2 + h^2$. On peut ainsi remplacer $n^2 + h^2$ dans (2) afin d'obtenir

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn. \tag{3}$$

Quatrième égalité :
Le triangle BHA étant rectangle en H, les relations de trigonométrie s'y appliquent. En particulier, on a que $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{n}{c}$, c'est-à-dire $n = c\cos(\widehat{A})$. Et en remplaçant une dernière fois dans (3), on trouve

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}). \tag{4}$$

Conclusion :
L'égalité (4) est équivalente, en remplaçant les lettres minuscules par les distances entre les points, à

$$\boxed{\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB\cos(\widehat{A})}},$$

ce qui démontre notre égalité de départ.

– Partie II –

On utilise, comme suggéré par l'énoncé, une méthode analogue à la première partie.

Première égalité :
D'après le codage de la figure, le triangle BHC est rectangle en H, donc

$$a^2 = m^2 + h^2. \tag{1}$$

Deuxième égalité :
D'après la figure, $m = b + n$, donc $m^2 = (b + n)^2 = b^2 + 2bn + n^2$. En remplaçant ce résultat dans (1), on trouve que :

$$a^2 = b^2 + 2bn + n^2 + h^2. \tag{2}$$

Troisième égalité :
Toujours d'après le codage de la figure, le triangle BHA est rectangle en H, donc $c^2 = n^2 + h^2$. On peut ainsi remplacer $n^2 + h^2$ dans (2) afin d'obtenir

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn. \tag{3}$$

Quatrième égalité :
Le triangle BHA étant rectangle en H, les relations de trigonométrie s'y appliquent. En particulier, on a que $\cos(\widehat{HAB}) = \cos(180° - \widehat{A}) = \dfrac{n}{c}$, c'est-à-dire $n = c\cos(180° - \widehat{A})$. Et en remplaçant une dernière fois dans (3), on trouve

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \widehat{A}). \tag{4}$$

Conclusion :
L'égalité (4) est équivalente, en remplaçant les lettres minuscules par les distances entre les points, à

$$\boxed{\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2 \times AC \times AB \times \cos(180° - \widehat{A})}},$$

ce qui démontre notre égalité de départ.

<u>*Questions bonus*</u> :

1. Complétons le tableau avec 2 chiffres après la virgule :

α	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
cos(α)	1	0,94	0,77	0,5	0,17	– 0,17	– 0,5	– 0,77	– 0,94	–1
180° – α	180°	160°	140°	120°	100°	80°	60°	40°	20°	0°
cos(180° – α)	–1	– 0,94	– 0,77	– 0,5	– 0,17	0,17	0,5	0,77	0,94	1

2. On conjecture que quelque soit la valeur de α comprise entre 0° et 180°, on a
$$\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha).$$

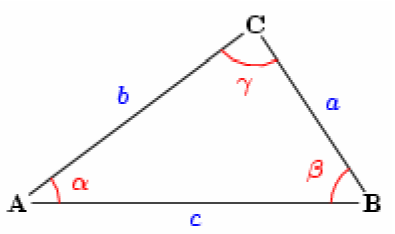
3. En admettant cette conjecture, on peut donc dire que le résultat de la seconde partie est le même que celui de la première.

Finalement, quelque soit le triangle ABC, on a la relation :

$$\boxed{\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \cos(\widehat{A})}}.$$

Point historique…

Le **théorème d'Al-Kashi** est un théorème de géométrie du triangle couramment utilisé en trigonométrie. Il généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles : ***il relie le troisième côté d'un triangle aux deux premiers ainsi qu'au cosinus de l'angle formé par ces deux côtés***.

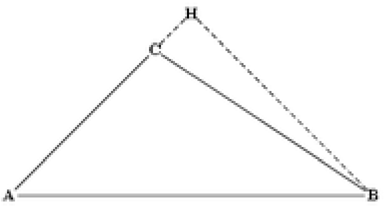


Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure 1 : d'une part α, β et γ pour les angles et, d'autre part, *a*, *b* et *c* pour les côtés respectivement opposés à ces angles. Alors, le théorème d'al-Kashi s'énonce de la façon suivante :
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Dans la plupart des autres langues, ce théorème est connu sous le nom de **loi des cosinus**, appellation toutefois relativement tardive. En français, cependant, il porte le nom du mathématicien perse Ghiyath al-Kashi qui unifia les résultats de ses prédécesseurs, et est parfois aussi appelé **théorème de Pythagore généralisé** puisque le théorème de Pythagore en est un cas particulier (lorsque γ est un angle droit, on retrouve le théorème de Pythagore).

Histoire

Les *Éléments* d'Euclide, datant du III^{e} siècle av. J.-C., contenaient déjà une approche géométrique de la généralisation du théorème de Pythagore : les propositions 12 et 13 du livre II, traitent séparément le cas d'un triangle obtusangle et celui d'un triangle acutangle. (…) En notant ABC le triangle d'angle obtus A et H le pied de la hauteur issue de B (cf. Fig. ci-contre), les notations modernes permettent de résumer l'énoncé ainsi :
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2\ CA\ CH.$$



Il fallut attendre la trigonométrie arabo-musulmane au Moyen Âge pour voir le théorème évoluer dans sa forme et dans sa portée : l'astronome et mathématicien al-Battani généralisa le résultat d'Euclide à la géométrie sphérique au début du X^{e} siècle, ce qui permit d'effectuer des calculs de distance angulaire entre étoiles. C'est durant la même période que se sont établies les premières tables trigonométriques, pour les fonctions sinus et cosinus. Cela permit à Ghiyath al-Kashi, mathématicien de l'école de Samarcande, de mettre le théorème sous une forme utilisable pour la triangulation au cours du XV^{e} siècle. La propriété a été popularisée en occident par François Viète qui l'a, semble-t-il, redécouverte indépendamment.
C'est au début du XIX^{e} siècle que les notations algébriques modernes permettent d'écrire le théorème sous sa forme actuelle et qu'il prend dans de nombreuses langues le nom de loi (ou théorème) des cosinus.

Démonstrations

Plusieurs démonstrations de ce théorème sont possibles :

- par les aires (en comparant des aires astucieusement « construites ») ;
- par le théorème de Pythagore (**celle qu'on a utilisé dans ce devoir**) ;
- par la puissance d'un point par rapport à un cercle ;
- par le calcul vectoriel (utilisation du produit scalaire).