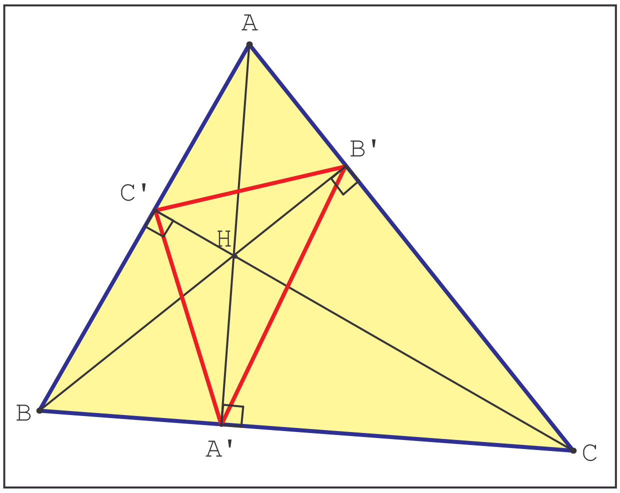
Exercice n° 1 (le triangle orthique) – 10 points

On considère un triangle ABC possédant tous ses angles aigus. Le point H désigne l'orthocentre de ce triangle et les points A', B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C. On se propose de démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle A'B'C'.



1. Le triangle HCB' est rectangle, donc B' appartient au cercle de diamètre [HC]. De même, le triangle HCA' est rectangle, donc A' est aussi sur ce cercle de diamètre [HC]. On en déduit que les quatre points A', H, B' et C sont cocycliques.
   On montre de la même manière que les points A', H, C' et B sont tous les quatre sur le même cercle de diamètre [HB].

2. Puisque les points A', H, B' et C se trouvent sur le cercle de diamètre [HC], on peut appliquer le théorème de l'angle inscrit. En effet, les angles $\widehat{HA'B'}$ et $\widehat{HCB'}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{HB'}$, ils sont donc égaux. On montre de la même manière que les angles $\widehat{HA'C'}$ et $\widehat{HBC'}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{HC'}$, ils sont donc égaux.

3. Notons α cet angle aigu en commun. L'angle inconnu du premier triangle rectangle aura donc pour mesure 180 – 90 – α (puisque la somme des angles d'un triangle vaut toujours 180°), et l'angle inconnu du second triangle rectangle aura donc pour mesure 180 – 90 – α. Ces deux triangles rectangles ont donc les mêmes mesures d'angles.
   Les triangles ABB' et ACC' sont rectangles, et ils possèdent l'angle $\widehat{B'AC'}$ en commun. Leur angles sont donc égaux. En particulier, $\widehat{ACC'} = \widehat{ABB'}$.

4. D'après les résultats de la question 2, on en déduit que $\widehat{ABB'} = \widehat{C'BH} = \widehat{C'A'H}$ et $\widehat{ACC'} = \widehat{B'CH} = \widehat{B'A'H}$. Au final, d'après la question précédente, on a que $\widehat{C'A'H} = \widehat{B'A'H}$, c'est-à-dire que (A'H) est la bissectrice de l'angle $\widehat{C'A'B'}$. C'est donc bien l'une des bissectrices du triangle.

5. On montrerait de la même manière que (B'H) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A'B'C'}$ et que (C'H) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B'C'A'}$. Puisque (HA') = (HA), (HB') = (HB), (HC') = (HC), et que les hauteurs (HA), (HB) et (HC) sont concourantes en H, on en déduit que (HA'), (HB') et (HC') sont aussi concourantes en H. H est donc bien le point de concours des trois bissectrices du triangle A'B'C'.

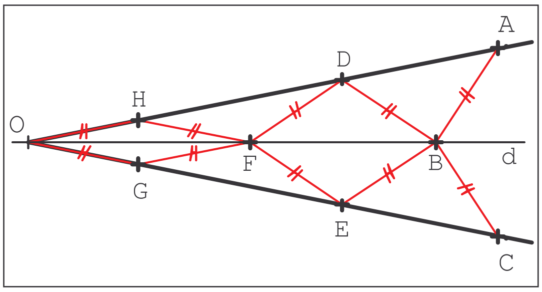
Exercice n° 2 (lien entre des centres du cercle) – 6 points

1. D'après le théorème des milieux (puisque C' est le milieu de [AB] et B' le milieu de [AC]), les droites (B'C') et (BC) sont parallèles. Or la figure nous assure que (AI) ⊥ (B'C'), donc (AI) ⊥ (BC), de sorte que (AI) soit la hauteur issue de A du triangle ABC.
   On montre de la même manière que (BJ) est la hauteur issue de B du triangle ABC, et que (CK) est la hauteur issue de C du même triangle.

Puisque les hauteurs d'un triangle sont concourantes, les droites (AI), (BJ) et (CK) le sont, et le point de concours n'est autre que l'orthocentre du triangle ABC.

2. Par définition, (HA') $\perp$ (B'C'), donc (HA') $\perp$ (BC). On en déduit que (HA') est la médiatrice de [BC]. De même, (HB') est la médiatrice de [AC] et (HC') est la médiatrice de [AB]. H est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, ce qui nous amène directement à l'égalité HA = HB = HC.

Exercice n° 3 (problème d'angle) – 4 points



On trace déjà la droite *d* passant par O et I, et on nomme tous les points de la figure, comme indiqué ci-contre.

$\widehat{FOH} = \widehat{OFH} = \dfrac{\alpha}{2}$ car OFH est isocèle en H, donc $\widehat{OHF} = 180 - \alpha$, et donc $\widehat{FHD} = 180 - (180 - \alpha) = \alpha$ car les angles $\widehat{OHF}$ et $\widehat{FHD}$ sont supplémentaires.

$\widehat{FDH} = \alpha$ car FDH est isocèle en F, donc $\widehat{HFD} = 180 - 2\alpha$, et donc $\widehat{BFD} = 180 - (180 - 2\alpha) - \dfrac{\alpha}{2} = 2\alpha - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3\alpha}{2}$. On en déduit que $\widehat{FBD} = \dfrac{3\alpha}{2}$ et que $\widehat{FDB} = 180 - 2 \times \dfrac{3\alpha}{2} = 180 - 3\alpha$.

Ensuite, $\widehat{BDA} = 180 - \alpha - (180 - 3\alpha) = 2\alpha$. Par suite, $\widehat{BAD} = 2\alpha$ et $\widehat{DBA} = 180 - 2 \times 2\alpha = 180 - 4\alpha$.

Enfin, $\widehat{dBA} = 180 - \dfrac{3\alpha}{2} - (180 - 4\alpha) = 4\alpha - \dfrac{3\alpha}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$. Pour conclure, $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABd} = 5\alpha$.