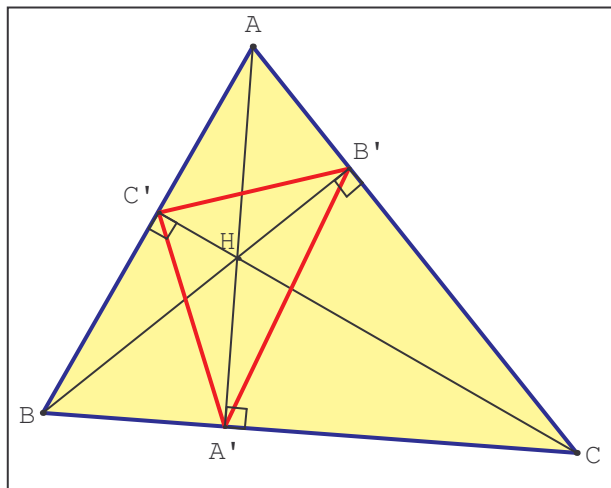


La notation tiendra particulièrement compte du soin, de l'orthographe et en particulier de la précision des figures dessinées et de la rédaction. L'utilisation d'un logiciel de géométrie pour s'aider est autorisée.

Exercice n° 1 (le triangle orthique¹) – 10 points

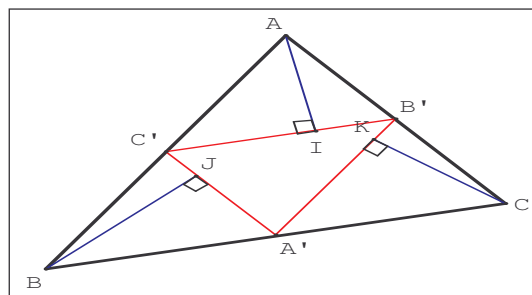
On considère un triangle ABC possédant tous ses angles aigus. Le point H désigne l'orthocentre de ce triangle et les points A', B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C. On se propose de démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle A'B'C'.



1. Montrer que les points A', H, B', C d'une part, ainsi que les points A', H, C', B d'autre part, sont cocycliques².
2. Montrer que les angles $\widehat{HA'B'}$ et $\widehat{HCB'}$ sont égaux, puis faire de même avec les angles $\widehat{HA'C'}$ et $\widehat{HBC'}$.
3. Prouver que deux triangles rectangles ayant en commun un angle aigu, ont les mêmes angles. En déduire que les angles $\widehat{ABB'}$ et $\widehat{ACC'}$ ont même mesure.
4. Démontrer alors que (HA') est l'une des bissectrices du triangle A'B'C'.
5. Terminer la démonstration et conclure.

Exercice n° 2 (lien entre des centres du cercle) – 6 points

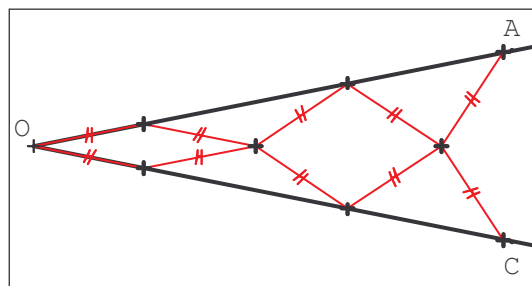
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque, et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB].



1. Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes. Quel est le point de concours ?
2. Soit H le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C'. Justifier l'égalité $HA = HB = HC$.

Exercice n° 3 (problème d'angle) – 4 points

La figure ci-contre est donnée. On pose $\widehat{AOC} = \alpha$. Calculer \widehat{ABC} en fonction de α .



¹ : Dans la construction, c'est le triangle A'B'C' qui est appelé « triangle orthique ».

² : Quatre points sont dits « cocycliques » s'il appartient à un même cercle \mathcal{C} . On demande donc de montrer que A', H, B' et C sont sur un même cercle. A préciser qu'on peut toujours trouver un cercle passant par trois points, mais pas forcément par quatre.