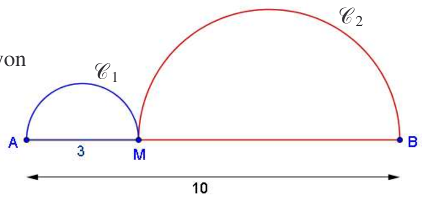
Exercice n° 1 (fonctions en géométrie) – 8,5 points

1. a) La figure illustrant le cas $x = 3$ est ci-contre :



b) On rappelle que le périmètre d'un cercle de rayon R est donné par la formule

$\boxed{2\pi R}$.

A partir de cette formule, on détermine que le périmètre du demi-cercle $\mathscr{C}_1$ vaut $1{,}5\pi$ (en effet, le « 2 » de la formule se simplifie avec la division par 2 du fait que c'est un demi-cercle, et le 1,5 correspond au rayon de ce demi-cercle). De la même manière, on montre que le périmètre du second demi-cercle $\mathscr{C}_2$ est $3{,}5\pi$. On en déduit que la somme des deux vaut $\boxed{5\pi}$.

c) On rappelle que l'aire d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $\boxed{\pi R^2}$.

A partir de cette formule, on détermine que l'aire du demi-cercle $\mathscr{C}_1$ vaut $\dfrac{1{,}5^2\,\pi}{2}$. De la même manière, on montre que le périmètre du second demi-cercle $\mathscr{C}_2$ est $\dfrac{3{,}5^2\,\pi}{2}$. On en déduit que la somme des deux vaut $\dfrac{(1{,}5^2+3{,}5^2)\pi}{2} = \dfrac{(2{,}25+12{,}25)\pi}{2} = \boxed{7{,}25\,\pi}$.

2. a) La somme des périmètres, que l'on note $\mathscr{P}(x)$, sera égale à :

$$\mathscr{P}(x) = \left(\pi\,\frac{x}{2}\right) + \left(\pi\,\frac{10-x}{2}\right) = \pi\,\frac{x+10-x}{2} = 5\pi.$$

La somme des aires, que l'on note $\mathscr{A}(x)$, sera égale à :

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{10-x}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^2-20x+100}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}(x^2-10x+50)}.$$

La fonction $\mathscr{P}$ est toujours égale à 5π, quelle que soit la valeur de x, elle est donc constante.

b) On complète le tableau donné dans l'énoncé :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathscr{A}(x)$	39,27	32,20	26,70	22,78	20,42	19,63	20,42	22,78	26,70	32,20	39,27

c) Le graphique se trouve à la question 3. c)…

d) Deux réponses étaient acceptables : dire que c'est pour $x = 5$ que la somme des aires semble minimale, soit parce que la valeur associée à 5 dans le tableau est la plus petite, soit parce que c'est sur la courbe qu'on le voit.

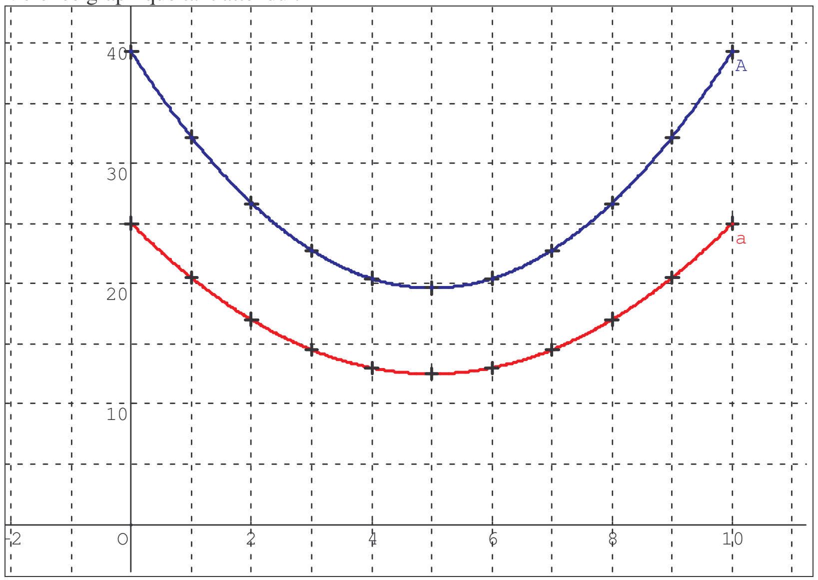
3. a) Le petit côté du petit triangle mesure $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ (en effet, c'est le théorème de Pythagore qui l'assure, sachant que ce triangle est aussi isocèle), et celui du grand triangle mesure $\dfrac{10-x}{\sqrt{2}}$.

Par conséquent, la somme des aires vaut : $a(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}(x^2-10x+50)$.

b) La fonction a est définie pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 10 (en effet, le point N appartient au segment [CD] ; au mieux, N est placé sur C, auquel cas $x = 0$; au pire, N est placé sur D, et dans ce cas, $x = 10$). Faisons aussi un tableau pour les valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(x)$	25	20,5	17	14,5	13	12,5	13	14,5	17	20,5	25

c) Voici ce graphique tant attendu :



Exercice n° 2 (ensembles de définition) – 6 points

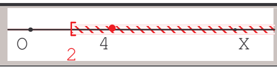
- $f(x)$ est un quotient. On résout donc l'équation « dénominateur = 0 » pour trouver les valeurs interdites, c'est-à-dire les valeurs qui ne seront pas dans l'ensemble de définition. Or $5 - 3x = 0$ est équivalent à $x = \dfrac{5}{3}$. On en déduit que $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}}$.
- $g(x)$ est une racine. On sait qu'une racine n'est définie que lorsque le nombre qui est dessous est positif. On résout donc l'inéquation $4 - 5x \geqslant 0$ pour trouver les valeurs de x qui sont dans l'ensemble de définition. Or $4 - 5x \geqslant 0$ est équivalent à $x \leqslant \dfrac{4}{5}$, ce qui nous amène à dire que $\boxed{\mathscr{D}_g = \left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right]}$.
- $\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R} - \{-2\,,2\}}$
- $\boxed{\mathscr{D}_i = \mathbb{R}}$ (en effet, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle)
- $j(x)$ n'est définie que lorsque $(5-x)(x-3) \geqslant 0$. On sait qu'un produit de deux nombres est positif lorsque les deux nombres sont soit positifs, soit négatifs (« + par + fait + ; – par – fait aussi + »). Le plus simple est de faire un petit tableau de signes pour voir ce qu'il se passe :

x	$-\infty$ … 3	3 … 5	5 … $+\infty$
$5 - x$	+	+	−
$x - 3$	−	+	+
$(5 - x)(x - 3)$	−	+	−

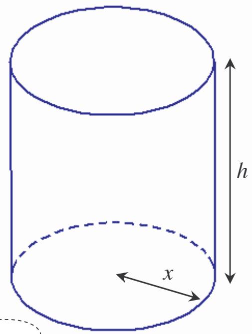
On constate que le seul endroit où le produit peut être positif est pour les réels x entre 3 et 5, de sorte que $\boxed{\mathscr{D}_j = [3\,,5]}$.

- La première racine est définie sur $[2\,;+\infty[$ et la seconde sur $[-4\,;+\infty[$. Le premier intervalle étant inclus dans le second, on en déduit que $\boxed{\mathscr{D}_k = [2\,,+\infty[}$.

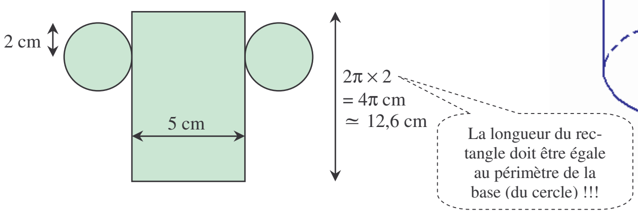
Synthétisons le tout dans le tableau suivant :

	ensembles de définition…			
Fonction	**en langage ensembliste**	**en terme d'intervalle(s)**	**sur une droite graduée**	**en terme d'inégalités**
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$	$[2\,;+\infty[- \{4\}$	$[2\,;4[\cup]4\,;+\infty[$		$2 \leqslant x < 4$ ou $x > 4$
$f(x)$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$	$\left]-\infty\,;\dfrac{5}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right[$		$x < \dfrac{5}{3}$ ou $x > \dfrac{5}{3}$
$g(x)$	$\left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right]$	$\left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right]$		$x \leqslant \dfrac{4}{5}$
$h(x)$	$\mathbb{R} - \{-2\,;2\}$	$]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;+\infty[$		$x < -2$ ou $x > 2$ ou $-2 < x < 2$
$i(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\infty\,;+\infty[$		—
$j(x)$	$[3\,;5]$	$[3\,;5]$		$3 \leqslant x \leqslant 5$
$k(x)$	$[2\,;+\infty[$	$[2\,;+\infty[$		$x \geqslant 2$

Exercice n° 3 (boîtes de conserves) – 5,5 points



1. Le volume $\mathscr{V}$ est obtenu en multipliant l'aire de la base (πx^2) par la hauteur h, ce qui donne $\mathscr{V} = \pi h x^2$. Or le volume doit être de 1 L, soit 1000 cm^3, donc $1000 = \pi h x^2$, d'où $h = \dfrac{1000}{\pi x^2}$.
2. a) Les dimensions ne sont pas respectées ici, mais les mesures sont indiquées :



DM n° 3 – corrigé 20/10/2006

b) L'aire d'une base de la boîte est égale à πx^2 et l'aire latérale vaut $2\pi h x$. L'aire totale est donc égale à $2\pi x^2 + 2\pi h x$.

c) L'aire totale (en cm^2) de la boîte est donc $f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \dfrac{1000}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \dfrac{2000}{x}$.

3. a) L'aire d'une boîte dont le rayon mesure 2 cm est d'environ 1000 cm^2. L'aire d'une boîte dont le diamètre mesure 8 cm (donc le rayon mesure 4 cm) est d'environ 600 cm^2.

   b) Ce sont des boîtes d'environ 4 cm et 7 cm de rayon qui rendent l'aire égale à 600 cm^2 (on rappelle que dans les deux cas, la hauteur est déterminée par le fait que le volume total soit égal à 1 litre, ou 1000 cm^3, cela détermine dont deux uniques boîtes !).

   c) On pourrait conjecturer qu'une boîte de rayon 5,5 cm rend l'aire minimale.

   d) Puisque $h = \dfrac{1000}{\pi x^2}$, la hauteur d'une boîte dont le rayon serait égal à 5,4193 serait elle-même égale à 10,8384 cm. On constate que si l'on regarde une telle boîte de face, elle sera aussi large que haute (c'est-à-dire qu'elle s'inscrit dans un carré). On peut aussi interpréter ce fait en disant que sur un patron de la boîte, la largeur du rectangle sera égale au diamètre de chacun des deux cercles.

4. Si la boîte était cubique, de volume 1 litre (donc 1000 cm^3), la seule valeur possible pour la longueur de son arête est 10 cm : en effet, le volume sera bien égal à $10 \times 10 \times 10 = 1000$ cm^3. Son aire totale sera donc la somme des aires des 6 carrés identiques de son patron, soit $6 \times (10 \times 10) = 600$ cm^2.
   L'aire d'une telle boîte cubique de volume 1 litre est plus importante que l'aire minimale d'une boîte cylindrique de même volume. Autrement dit, les ingénieurs peuvent de satisfaire d'avoir résolu ce problème en utilisant des boîtes cylindriques qui sont nettement plus esthétiques que les boîtes cubiques…