La notation tiendra compte du soin apporté à la copie, du nombre de fautes d'orthographe, et surtout de la clarté des réponses (il va de soi que tout calcul doit être justifié).

Exercice n° 1 (suite de l'exercice n° 3 du DM 1) – 8 points

Partie II : Le but de cette partie II est la construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

1. Reporter sur la copie, à l'aide du corrigé du DM 1, la droite graduée d'unité 5 cm représentant les points de coordonnées suivants :

$L(\sqrt{5})$; $M(1)$; $N(1+\sqrt{5})$; $P\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $Q\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.

Laisser 6 cm au-dessus de la droite graduée, et 6 cm en-dessous !!!

2. A l'aide de la calculatrice, calculer les nombres $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $b = \cos(72°)$. Que peut-on conjecturer ?

Dans la suite, on admettra que cette conjecture est réalisée.

3. a) Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O, origine de la droite graduée, passant par le point M. Tracer la perpendiculaire à la droite graduée passant par le point Q. Elle coupe $\mathcal{C}_1$ en deux points, que l'on appelle A (celui qui est au-dessus de la droite), et S.

b) Tracer ensuite le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre A et passant par le point M. Il coupe $\mathcal{C}_1$ en un autre point noté T. Construire le point H, symétrique de T par rapport à la droite graduée. Le point H appartient-il au cercle $\mathcal{C}_1$? Justifier.

4. Tracer ***en vert*** les segments [MA], [AT], [TH], [HS] et [SM]. Quelle conjecture peut-on émettre par rapport à la nature de la figure MATHS (on ne demande pas de justification) ?

5. On rappelle que le cercle $\mathcal{C}_1$ est de rayon unité. On se place dans le triangle OQA rectangle en Q. Que vaut $\cos(\widehat{QOA})$? En déduire une mesure de l'angle $\widehat{MOA}$ (indication : utiliser la question 2).

6. Combien mesurent les angles $\widehat{AOT}$, $\widehat{TOH}$, $\widehat{HOS}$, $\widehat{SOM}$? Justifier les réponses, puis démontrer la conjecture émise à la question 4.

Exercice n° 2 (nombres) – 5 points

Répondre par "VRAI" ou "FAUX", en justifiant la réponse (si "VRAI", on attend une justification par une démonstration, une propriété ou un théorème du cours ; si "FAUX", un contre-exemple suffit).

1. Tout entier est rationnel
2. La racine carrée d'un entier naturel n'est jamais un rationnel.

RAPPEL

Un irrationnel est un réel qui n'est pas rationnel…

3. Le carré d'un irrationnel est un irrationnel.
4. L'inverse d'un irrationnel est un irrationnel.
5. L'inverse d'un rationnel est toujours un rationnel.
6. L'inverse d'un décimal est toujours un décimal.
7. La différence de deux entiers naturels est un entier naturel.
8. $-5 \in \mathbb{Q}$.
9. $\frac{12}{3} \in \mathbb{Z}$.
10. $\frac{1+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ est un irrationnel.

Exercice n° 3 (critère de divisibilité par 7) – 7 points

Un élève demanda un jour à M. LENZEN si 847 est divisible par 7. Ce dernier lui répondit :

> « Mais bien sûr, pardi !! Si tu prends le dernier chiffre (7), que tu le multiplies par 2 (7×2), et que tu le soustraies du nombre de départ ***sans*** ce dernier chiffre (84), tu verras que le résultat est divisible par 7. Alors ton nombre de départ l'est aussi. »

Autrement dit : $84 - (7 \times 2) = 84 - 14 = 70$.

1. Avec cette méthode, déterminer si les nombres suivants sont divisibles par 7, en détaillant les calculs sur la copie : 653 ; 1589 ; 938 ; 452.

2. Soit n un entier naturel quelconque, qui s'écrit sous la forme $n = 10a + b$, avec a et b deux entiers naturels et $\mathbf{0 \leqslant b \leqslant 9}$ (pour l'exemple : si $n = 847$, alors $a = 84$ et $b = 7$). Le but de cette question est de vérifier si le critère de M. LENZEN se généralise à tous les entiers naturels.

a) Traduire sous forme mathématique, en fonction de a et b, les phrases suivantes :
• le nombre de départ n sans son dernier chiffre ;
• le dernier chiffre multiplié par 2 ;
• la différence des deux.

b) On suppose que $a - 2b$ est divisible par 7. Traduire mathématiquement cette divisibilité, en s'aidant de la définition d'un diviseur.

c) Est-ce que $10(a - 2b)$ est divisible par 7 ?
Est-ce que $21b$ est divisible par 7 ?
Est-ce que la somme $10(a - 2b) + 21b$ est divisible par 7 ?
} Justifier !

d) Développer et réduire $10(a - 2b) + 21b$, et conclure quant au problème posé.

Exercice bonus (+1 point hors barème)

Trouver les entiers naturels m et p, avec $1 \leqslant p \leqslant 100$, tels que leur quotient $\frac{m}{p}$ ait la valeur la plus proche du nombre π.