

---

# **CAPES interne 2010 de Mathématiques**

## **CORRIGÉ**

Martial LENZEN  
*webmaster@capes-de-maths.com*

---

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une  
préparation à la philosophie – *Isocrate*

# Problème 1

Ce problème a pour objet l'étude d'une courbe de Gauss et l'approximation d'une intégrale.

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions de la variable réelle, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## Partie I - Inégalités des accroissements finis

Soient  $m$  et  $M$  deux nombres réels tels que  $m \leq M$ .

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (non vide et non réduit à un point) et  $g$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $I$  telle que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , on a :

$$m \leq g'(x) \leq M.$$

On fixe un nombre réel  $a$  dans l'intervalle  $I$  et on introduit les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur l'intervalle  $I$  par :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= g(x) - g(a) - m(x - a), \\ \psi(x) &= g(x) - g(a) - M(x - a).\end{aligned}$$

### I.1 Étudier le sens de variation des fonctions $\varphi$ et $\psi$ sur l'intervalle $I$ .

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont dérivables sur  $I$  comme combinaisons linéaires de fonctions dérivables. Ainsi, pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a

$$\varphi'(x) = g'(x) - m \quad \text{et} \quad \psi'(x) = g'(x) - M.$$

La double inégalité  $m \leq g'(x) \leq M$  implique alors à la fois que  $\varphi'(x) = g'(x) - m \geq 0$  et  $\psi'(x) = g'(x) - M \leq 0$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , c'est-à-dire que la fonction  $\varphi$  est croissante sur  $I$  et la fonction  $\psi$  est décroissante sur  $I$ .

### I.2 En déduire que, pour tous nombres réels $a$ et $b$ appartenant à l'intervalle $I$ et tels que $a \leq b$ , on a la double inégalité suivante :

$$m(b - a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b - a).$$

Lorsque  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels de  $I$  tels que  $b \geq a$ , la question précédente permet d'affirmer que

$$\begin{array}{ll}\varphi(b) \geq \varphi(a) & (\varphi \text{ croissante}) \\ \Leftrightarrow 0 \leq \varphi(b) - \underbrace{\varphi(a)}_{=0} & \\ \Leftrightarrow 0 \leq g(b) - g(a) - m(b - a) & \\ \Leftrightarrow m(b - a) \leq g(b) - g(a). & \end{array} \quad \begin{array}{ll}\psi(b) \leq \psi(a) & (\psi \text{ décroissante}) \\ \Leftrightarrow \psi(b) - \underbrace{\psi(a)}_{=0} \leq 0 & \\ \Leftrightarrow g(b) - g(a) - M(b - a) \leq 0 & \\ \Leftrightarrow g(b) - g(a) \leq M(b - a). & \end{array}$$

En combinant ces deux inégalités, on trouve la réponse attendue :

$$m(b - a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b - a).$$

## Partie II - Étude d'une fonction gaussienne et de sa courbe représentative

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

II.1 Étudier la parité de la fonction  $f$  et son sens de variation sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :

$$f(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = \underbrace{-x}_{\leq 0} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{> 0} \leq 0.$$

On en déduit que la fonction  $f$  est paire et qu'elle est décroissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

II.2 Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , en indiquant les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$ , on a que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

De plus, la question précédente nous permet d'affirmer que  $f$  atteint son maximum en  $x = 0$ , et celui-ci vaut  $f(0) = e^0 = 1$ . Ces informations nous permettent alors de tracer le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	$0$	$1$	$0$

(Arrows in the original image point from 0 to 1 and from 1 to 0)

II.3 Étude de la fonction  $f'$

II.3.1 Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle linéaire  $y' + xy = 0$ .

On a :

$$f' + xf = -xe^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

donc  $f$  est bien solution de l'équation différentielle linéaire  $y' + xy = 0$ .

II.3.2 En déduire que la fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout nombre réel  $x$ , sa dérivée  $f''$  vérifie la relation suivante :

$$f''(x) = (x^2 - 1) f(x).$$

L'égalité précédente s'écrit aussi  $f'(x) = -x f(x)$ , ce qui permet de dire que la fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f''(x) = -x f'(x) + (-1) f(x) \stackrel{\text{II.3.1}}{=} -x(-x f(x)) - f(x) = (x^2 - 1) f(x).$$

II.3.3 En déduire le sens de variation de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

D'après le tableau de variations de la fonction  $f$  réalisé à la question II.2, on a  $f(x) > 0$  pour tout réel  $x$ . Faisons alors un tableau de signes et de variations :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$x^2 - 1$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$		$+$		$+$		$+$
$f''$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f'$		↗		↘		↗

II.4 Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  tel que  $0 \leq x \leq 1$ , on a :  $-1 \leq f''(x) \leq 0$ .

Sur l'intervalle  $[0; 1]$ , la fonction  $f$  est décroissante (II.1). Par conséquent,  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 < f(1) \leq f(x) \leq f(0) = 1$ . Par ailleurs, la fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  est croissante sur cet intervalle, d'où  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 0$ . On en déduit, par multiplication de cette dernière inégalité par un nombre positif non nul et plus petit que 1, que :

$$-1 \leq (x^2 - 1) f(x) \leq 0, \quad \text{c'est-à-dire } -1 \leq f''(x) \leq 0.$$

II.5 Montrer que pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , on a :

$$f'(b)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b - a),$$

et que pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $1 \leq a \leq b$ , on a :

$$f'(a)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b - a).$$

Il suffit de reprendre les questions de la partie I. On considère  $I = [a; b] \subset [0; 1]$ . D'après la question II.3.3, la fonction  $f'$  est décroissante sur  $[0; 1]$  (donc sur  $I$ ), donc  $x \in I \Leftrightarrow a \leq x \leq b \Leftrightarrow f'(b) \leq f'(x) \leq f'(a)$ . D'après la question I.2 (que l'on pourrait appliquer pour tous nombres  $c$  et  $d$  de l'intervalle  $I$ , alors autant choisir  $c = a$  et  $d = b$  tout de suite!), on a alors que

$$f'(b)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b - a).$$

De la même manière,  $f'$  est croissante sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , d'où en prenant  $I = [a; b] \subset [1; +\infty[$ , on aura  $x \in I \Leftrightarrow a \leq x \leq b \Leftrightarrow f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$ . La même question I.2 permet alors de conclure que

$$f'(a)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b - a).$$

Dans toute la suite du problème, on munit le plan euclidien d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , et on note  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans ce repère.

## II.6 Étude des tangentes à la courbe $\Gamma$

Soit  $a$  un nombre réel. On note  $T_a$  la tangente à la courbe  $\Gamma$  au point de coordonnées  $(a, f(a))$ .

Pour tout nombre réel  $x$ , on note désormais  $u(x)$  l'ordonnée du point de  $T_a$  d'abscisse  $x$ .

### II.6.1 Expliciter une expression de $u(x)$ .

Rappelons que, puisque  $f$  est dérivable, la tangente  $T_a$  à la courbe  $\Gamma$  au point d'abscisse  $a$  est la droite d'équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . D'où, avec les notations de l'énoncé,

$$u(x) = f'(a)(x - a) + f(a) = -a e^{-\frac{a^2}{2}}(x - a) + e^{-\frac{a^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}}(a^2 + 1 - ax).$$

II.6.2 On suppose ici que le nombre réel  $a$  appartient à l'intervalle  $]0; 1[$ . Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a :

$$f(x) \leq u(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

Rappelons que dans la question II.5, on a vu que pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , on a :

$$f'(b)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b - a).$$

La cas  $x = a$  est trivial : en effet, dans ce cas, on a  $f(x) = u(x)$  et l'inégalité est donc vérifiée. Soit alors un nombre réel  $x \in [0; 1]$ . On a alors :

$\begin{aligned} & a \leq x \\ \stackrel{\text{II.5}}{\Rightarrow} & f'(x)(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq f'(a)(x - a) \\ \Rightarrow & f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a) \\ \Rightarrow & f(x) \leq u(x). \end{aligned}$	$\begin{aligned} & x \leq a \\ \stackrel{\text{II.5}}{\Rightarrow} & f'(a)(a - x) \leq f(a) - f(x) \leq f'(x)(a - x) \\ \Rightarrow & f(x) \leq -f'(a)(a - x) + f(a) \\ \Rightarrow & f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a) \\ \Rightarrow & f(x) \leq u(x). \end{aligned}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dans tous les cas, l'inégalité  $f(x) \leq u(x)$  est bien vérifiée.

Graphiquement, cela signifie que sur l'intervalle  $]0; 1[$ , la tangente à la courbe se trouve toujours au-dessus de la courbe.

II.6.3 On suppose ici que le nombre réel  $a$  appartient à l'intervalle  $]1; +\infty[$ . Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; +\infty[$ , on a :

$$f(x) \geq u(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

La cas  $x = a$  est trivial : en effet, dans ce cas, on a  $f(x) = u(x)$  et l'inégalité est donc vérifiée. Soit alors un nombre réel  $x \in [1; +\infty[$ . On a alors :

$$\begin{array}{ll}
 a \leq x & x \leq a \\
 \stackrel{\text{II.5}}{\Rightarrow} f'(a)(x-a) \leq f(x) - f(a) \leq f'(x)(x-a) & \stackrel{\text{II.5}}{\Rightarrow} f'(x)(a-x) \leq f(a) - f(x) \leq f'(a)(a-x) \\
 \Rightarrow f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a) & \Rightarrow f(x) \geq -f'(a)(a-x) + f(a) \\
 \Rightarrow f(x) \geq u(x). & \Rightarrow f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a) \\
 & \Rightarrow f(x) \geq u(x).
 \end{array}$$

Dans tous les cas, l'inégalité  $f(x) \geq u(x)$  est bien vérifiée.

Graphiquement, cela signifie que sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ , la tangente à la courbe se trouve toujours en-dessous de la courbe.

**II.6.4 Déterminer le signe de  $f(x) - u(x)$  selon les valeurs du nombre réel  $x$  dans le cas où  $a = 1$ .**

**Interpréter le résultat graphiquement.**

Lorsque  $a = 1$ , la question II.5, qui autorise aussi le cas  $a = 1$  pour ses deux doubles inégalités, permet de déduire (en l'utilisant respectivement comme dans la question II.6.2) que  $f(x) \leq u(x)$  lorsque  $x \leq a$  et que  $f(x) \geq u(x)$  lorsque  $x \geq a$ .

Graphiquement, la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 traverse la courbe : la tangente est au-dessus avant 1 et en-dessous après 1.

## II.7 Étude des cordes de la courbe $\Gamma$

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On note  $D_{a,b}$  la droite passant par les points de coordonnées  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ .

*Pour tout nombre réel  $x$ , on note désormais  $v(x)$  l'ordonnée du point de  $D_{a,b}$  d'abscisse  $x$ .*

**II.7.1 Expliciter une expression de  $v(x)$ .**

Le coefficient directeur de cette droite est donné par le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On trouve alors facilement l'ordonnée à l'origine en résolvant une équation d'une seule inconnue (la droite passant par exemple par le point de coordonnées  $(a, f(a))$ ). On trouve alors, avec les notations de l'énoncé, que :

$$v(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

**II.7.2 On suppose que les réels  $a$  et  $b$  vérifient  $0 \leq a \leq b \leq 1$ .**

II.7.2.1 Montrer qu'il existe un réel  $c$  appartenant à  $[a; b]$  tel que  $f'(x) - v'(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable en particulier sur  $]a; b[$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre réel  $c$  strictement compris entre  $a$  et  $b$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c) - v'(c) = 0.$$

II.7.2.2 Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[a; b]$ , on a :

$$f(x) \geq v(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

Le résultat de la question II.6.2 nous permet d'affirmer que  $f$  est une fonction concave sur  $[a; b]$ . Par propriété des fonctions concaves, on a directement que (et c'est l'interprétation graphique) la partie de courbe située entre les points d'abscisses  $a$  et  $b$  se trouve au-dessus de droite formée par ces deux points. Autrement dit, pour tout réel de l'intervalle  $[a; b]$ , on a :

$$f(x) \geq v(x).$$

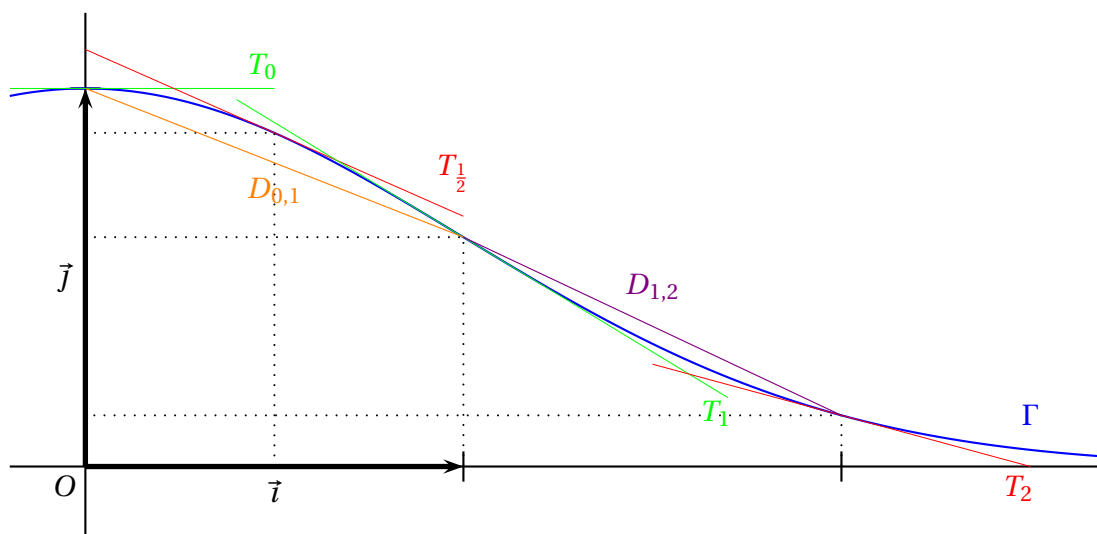
II.7.2.3 Démontrer de façon analogue que, si les nombres réels  $a$  et  $b$  appartiennent à l'intervalle  $[1; +\infty[$ , on a pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[a; b]$  :

$$f(x) \leq v(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

On raisonne de manière exactement analogue à la question précédente, sauf que  $f$  est convexe au-delà du point d'abscisse 1.

II.8 Tracer, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm, la courbe  $\Gamma$  ainsi que les tangentes  $T_0, T_{\frac{1}{2}}, T_1, T_2$  et les droites  $D_{0,1}$  et  $D_{1,2}$ .



Dans toute la suite du problème,  $f$  désigne encore la fonction définie dans la partie II. Le fait que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  justifie l'existence, pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , de l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$ . On pose :  $A = \int_0^1 f(t) dt$ , c'est-à-dire :

$$A = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Les trois parties III, IV et V suivantes proposent de déterminer des valeurs approchées de  $A$ .

## Partie III - Table de la loi normale centrée réduite

On admettra que l'on définit un probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\mathbb{R}$  en posant, pour tout nombre réel  $x$  :

$$\mathbb{P}(]-\infty; x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

On pourra écrire en particulier :

$$\mathbb{P}(]-\infty; +\infty[) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Cette probabilité  $\mathbb{P}$  est celle de la loi normale centrée réduite.

### III.1 Préciser la valeur de $\mathbb{P}(]-\infty; 0])$ .

Nous avons déjà déterminé à la question II.1 que la fonction  $f$  était paire. Par conséquent,  $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ . Il s'en suit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_{-\infty}^0 f(t) dt \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

Au final,

$$\mathbb{P}(]-\infty; 0]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

### III.2 Exprimer $A$ en fonction de $\mathbb{P}(]-\infty; 1])$ .

On a :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(t) dt = \int_{-\infty}^1 f(t) dt - \int_{-\infty}^0 f(t) dt \\ &= \sqrt{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^1 f(t) dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) dt \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \left( \mathbb{P}(]-\infty; 1]) - \mathbb{P}(]-\infty; 0]) \right) = \sqrt{2\pi} \left( \mathbb{P}(]-\infty; 1]) - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$



III.3 Dans une table de la loi normale centrée réduite, on lit :

$$\mathbb{P}(]-\infty; 1]) \approx 0,8413 \quad (\text{arrondi au dix-millième}).$$

En déduire une approximation de  $A$  à  $10^{-3}$  près.

D'après la question précédente, et en utilisant la calculatrice, on trouve que :

$$A \approx \sqrt{2\pi} (0,8413 - 0,5) \approx 0,85551.$$

Une approximation de  $A$  à  $10^{-3}$  près est donc  $A \approx 0,856$ .

## Partie IV - Approximation par une somme d'aires de rectangles

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de  $A$  qui permette d'en fournir une valeur décimale approchée à  $10^{-2}$  près.

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif, } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

IV.1 Soit  $n$  en entier naturel non nul.

IV.1.1 Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , et pour tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ , on a :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

L'inégalité  $1 \leq k \leq n$  implique que  $0 \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$ . D'après la question II.2, la fonction  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ , donc en particulier sur  $[0; 1]$ . Par conséquent :

$$t \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right] \Leftrightarrow \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n} \Leftrightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

IV.1.2 En déduire que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

La double inégalité précédente étant valable pour tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ , on peut intégrer cette double inégalité sur cet intervalle afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k-1}{n}\right) dt \\ \Leftrightarrow \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) f\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

IV.2 Dédire de la question précédente que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a les inégalités :

$$u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}.$$

La double inégalité précédente étant valable pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Leftrightarrow & u_n \leq A \leq \frac{1}{n} \left( f(0) - f(1) + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ \Leftrightarrow & u_n \leq A \leq \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} + n u_n \right) \quad \Leftrightarrow \quad u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

IV.3.1 Dédire de la question précédente un encadrement de  $u_n$ , valable pour tout entier naturel  $n$  non nul.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, la seconde inégalité de la réponse ci-dessus donne :

$$A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}} \quad \Leftrightarrow \quad A - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{e}} \leq u_n.$$

Combinée à la première inégalité de la réponse ci-dessus, nous obtenons l'encadrement suivant :

$$A - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{e}} \leq u_n \leq A \quad \Leftrightarrow \quad A - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \leq u_n \leq A.$$

IV.3.2 Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et préciser sa limite.

Posons, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $v_n = A - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$  et  $w_n = A$ . On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= A - \frac{1}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) - A + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{>0} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc strictement croissante. De plus,  $w_{n+1} - w_n = 0 \leq 0$ , prouvant que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. Enfin, la différence

$$w_n - v_n = A - A + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$$

converge clairement vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Les deux suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont alors par définition adjacentes, et une propriété nous permet alors d'écrire qu'elles ont la même limite qui, grâce à l'expression de  $(w_n)$ , est sans nul doute  $A$ . Le passage à la limite dans la double inégalité de la question précédente permet alors de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \Leftrightarrow A \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = A.$$

IV.4 En utilisant les inégalités établies à la question IV.2, déterminer une valeur de  $n$  telle que  $u_n$  soit une valeur approchée par défaut de  $A$  à  $10^{-2}$  près. (On ne demande pas de calculer ici cette valeur approchée.)

Pour obtenir une valeur approchée par défaut à  $10^{-2}$  près, il faut que les membres de gauche et de droite de la double inégalité de la question IV.2 soit séparés d'au plus 2 centièmes. Il s'agit donc de résoudre l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}} - u_n < 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n\sqrt{e}} < 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}_{>0} < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow (0 <) \frac{1}{n} < \frac{10^{-2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}} &\Leftrightarrow n > \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}{10^{-2}} \approx 39,34693404 \\ &\Rightarrow n \geq 40 \end{aligned}$$

Même si cela n'est pas demandé, précisons que l'on obtient dans ce cas l'encadrement  $0,8506744346 \leq A \leq 0,8605111682$ , permettant d'affirmer que

$$A \approx 0,85.$$

## Partie V - Approximation par une somme d'aires de trapèzes

On se propose dans cette partie d'obtenir une autre valeur approchée de  $A$ , en utilisant des résultats établis dans la partie II.

Pour cela, on considérera les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(1) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels de l'intervalle  $[0;1]$  tels que  $a < b$ .

V.1 Justifier que la partie de la courbe  $\Gamma$  située entre les droites verticales d'équation  $x = a$  et  $x = b$  est située en-dessous de  $T_{\frac{a+b}{2}}$  et au-dessus de  $D_{a,b}$ .

Puisque  $a$  et  $b$  sont deux nombres de l'intervalle  $[0;1]$ , et que par conséquent, la demi-somme de  $a$  et  $b$  se trouve dans l'intervalle  $[0;1]$ , la question II.6.2 nous permet d'écrire que  $\Gamma$  se trouve au-dessus de  $T_{\frac{a+b}{2}}$  et la question II.7.2.2 permet de conclure cette question en affirmant que  $\Gamma$  se trouve au-dessus de  $D_{a,b}$ .

V.2 Démontrer la double inégalité suivante :

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Puisque  $\Gamma$  est « comprise » entre  $D_{a,b}$  et  $T_{\frac{a+b}{2}}$ , l'aire située sous la courbe  $\Gamma$  sera comprise entre celle sous la droite  $D_{a,b}$  et celle sous la droite  $T_{\frac{a+b}{2}}$  (ce que l'on entend par *aire sous la courbe* est en fait l'aire délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = a$  et  $y = b$ ). Rappelons que l'aire d'un trapèze de petite base  $b$ , de grande base  $B$  et de hauteur  $h$  est donnée par la formule

$$h \frac{B+b}{2}.$$

Par conséquent,

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t) dt.$$

Pour la deuxième inégalité, il faut savoir que l'aire sous la droite  $T_{\frac{a+b}{2}}$  (donc celle d'un trapèze) peut être calculée comme l'aire du rectangle de largeur  $b-a$  et de longueur  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  du fait que la tangente est prise au point dont l'abscisse est la demi-somme de  $a$  et  $b$ . Par conséquent,

$$\int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Nous obtenons ainsi la double inégalité demandée :

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

V.3 En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$v_n \leq A \leq w_n.$$

La double inégalité précédente étant vraie pour tous nombres  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $[0; 1]$  tels que  $a < b$ , on peut l'appliquer  $n$  fois sur les intervalles  $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)}{2} &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{0+\frac{1}{n}}{2}\right) \\ \frac{1}{n} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)}{2} &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}{2}\right) \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} \frac{f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)}{2} &\leq \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{n-1}{n}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces  $n$  égalités, on obtient finalement la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(1) \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \Leftrightarrow v_n \leq A \leq w_n.$$

- V.4 Expliciter  $v_3$  et  $w_3$ , puis donner une valeur décimale approchée à  $10^{-3}$  près par défaut de  $v_3$  et une valeur décimale approchée à  $10^{-3}$  près par excès de  $w_3$ .  
En déduire une valeur décimale approchée de  $A$  à  $10^{-2}$  près.

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{6} f(0) + \sum_{k=1}^2 f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6} f(1) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{18}} + e^{-\frac{2}{9}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 f\left(\frac{2k-1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left( e^{-\frac{1}{72}} + e^{-\frac{1}{8}} + e^{-\frac{25}{72}} \right). \end{aligned}$$

Une valeur décimale approchée par défaut à  $10^{-3}$  près de  $v_3$  est donc 0,849 et une valeur approchée par excès à  $10^{-3}$  près de  $w_3$  est alors 0,859. On en déduit alors une valeur décimale approchée de  $A$  à  $10^{-2}$  près :  $A \approx 0,85$ .

- V.5 Convergence des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- V.5.1 En intégrant par parties  $\int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt$ , montrer que :

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt.$$

Posons  $u(t) = t-b$  et  $v'(t) = f''(t)$ , de sorte que  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = f'(t)$ . Toutes ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[\frac{a+b}{2}; b]$  (continues, dérivables et de dérivées continues). On peut ainsi intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b u(t) v'(t) dt &= [u(t) v(t)]_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b u'(t) v(t) dt \\ \Leftrightarrow \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt &= [(t-b) f'(t)]_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(t) dt \\ \Leftrightarrow [f(t)]_{\frac{a+b}{2}}^b &= [(t-b) f'(t)]_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt \\ \Leftrightarrow f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= -\left(\frac{a+b}{2} - b\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt \\ \Leftrightarrow f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt. \end{aligned}$$

- V.5.2 Montrer de même que :  $f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt.$

Posons maintenant  $u(t) = a - t$ , de sorte que  $u'(t) = -1$ . Avec les fonctions  $v$  et  $v'$  définies ci-dessus, toutes ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[a; \frac{a+b}{2}]$ . On peut ainsi à nouveau intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} u(t) v'(t) dt &= [u(t) v(t)]_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} u'(t) v(t) dt \\ \Leftrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt &= [(a-t) f'(t)]_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} -f'(t) dt \\ \Leftrightarrow [-f(t)]_a^{\frac{a+b}{2}} &= [(a-t) f'(t)]_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt \\ \Leftrightarrow f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2} - b\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (a-t) f''(t) dt \\ \Leftrightarrow f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt. \end{aligned}$$

V.5.3 En utilisant II.4, justifier que l'on a :

- pour tout réel  $t$  de  $[\frac{a+b}{2}; b]$ ,  $0 \leq (t-b) f''(t) \leq (b-t)$  ;
- pour tout réel  $t$  de  $[a; \frac{a+b}{2}]$ ,  $0 \leq (a-t) f''(t) \leq (t-a)$ .

Rappelons le résultat de la question II.4 : pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a  $-1 \leq f''(x) \leq 0$ .

Soit alors un réel  $t$  de l'intervalle  $[\frac{a+b}{2}; b] \subset [0; 1]$  (notons que  $t \leq b$  implique  $t-b \leq 0$ ). En appliquant cette double inégalité, on trouve :

$$-1 \leq f''(t) \leq 0 \Leftrightarrow -(t-b) \geq (t-b) f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq (t-b) f''(t) \leq (b-t).$$

Soit maintenant un réel  $t$  de l'intervalle  $[a; \frac{a+b}{2}] \subset [0; 1]$  (notons que  $a \leq t$  implique  $a-t \leq 0$ ). En appliquant cette double inégalité, on trouve :

$$-1 \leq f''(t) \leq 0 \Leftrightarrow -(a-t) \geq (a-t) f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq (a-t) f''(t) \leq (t-a).$$

V.5.4 Dédurre de V.5.1, V.5.2 et de V.5.3 que :

$$0 \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{1}{8} (b-a)^2.$$

La question précédente permet d'écrire :

$$0 \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t) dt = \frac{b^2}{2} - b\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a+b)^2}{8}$$

et

$$0 \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) dt = \frac{(a+b)^2}{8} - a\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a^2}{2}.$$

On en déduit, après quelques calculs, que

$$0 \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt \leq 2 \frac{(a-b)^2}{8}.$$

Les égalités des questions V.5.2 et V.5.3 additionnées membre à membre permettent alors de conclure :

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} &= \frac{1}{2} \left( \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a-t) f''(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t-b) f''(t) dt \right) \\ \Rightarrow 0 \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} &\leq \frac{(b-a)^2}{8}. \end{aligned}$$

V.5.5 Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $0 \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{8n^2}$ .

On utilise les travaux de recherche effectués à la question V.3 pour déterminer que :

$$\begin{aligned} w_n - v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) - \frac{1}{2n} f(0) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n} f(1) \\ &\stackrel{V.3}{=} \frac{1}{n} f\left(\frac{0+\frac{1}{n}}{2}\right) - \frac{1}{n} \frac{f(0)+f(\frac{1}{n})}{2} + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{n-1}{n}+1}{2}\right) - \frac{1}{n} \frac{f(\frac{n-1}{n})+f(1)}{2}. \end{aligned}$$

Puisque la double inégalité de la question précédente est valable pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  compris entre 0 et 1, et que tous les  $\frac{k}{n}$  (pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) sont des nombres compris entre 0 et 1, on peut alors écrire : pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n}}{2}\right) - \frac{1}{n} \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} \leq \frac{1}{8n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{8n^3}.$$

Par addition de ces doubles inégalités pour tous les  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on trouve finalement que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{0+\frac{1}{n}}{2}\right) - \frac{1}{n} \frac{f(0)+f(\frac{1}{n})}{2} + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{n-1}{n}+1}{2}\right) - \frac{1}{n} \frac{f(\frac{n-1}{n})+f(1)}{2} &\leq n \frac{1}{8n^3} \\ \Leftrightarrow 0 \leq w_n - v_n &\leq \frac{1}{8n^2}. \end{aligned}$$

V.5.6 En utilisant V.3 et V.5.5, justifier que l'on a, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{8n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq w_n - A \leq \frac{1}{8n^2}.$$

En déduire que les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent vers  $A$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, la question V.3 nous affirme que  $v_n \leq A \leq w_n$ . À partir de là,

$$\begin{array}{ll}
 v_n \leq A \leq w_n & v_n \leq A \leq w_n \\
 \Leftrightarrow 0 \leq A - v_n \leq w_n - v_n & \Leftrightarrow v_n - w_n \leq A - w_n \leq 0 \\
 \stackrel{\text{V.5.5}}{\Rightarrow} 0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{8n^2}, & \Leftrightarrow 0 \leq w_n - A \leq w_n - v_n \\
 & \stackrel{\text{V.5.5}}{\Rightarrow} 0 \leq w_n - A \leq \frac{1}{8n^2}.
 \end{array}$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que  $A - v_n$  et  $w_n - A$  convergent vers 0, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = A.$$

## V.6 Estimation plus fine de l'erreur commise par défaut

V.6.1 En intégrant par parties  $\int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt$ , montrer que :

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt.$$

Posons  $u(t) = (t-a)(t-b)$  et  $v'(t) = f''(t)$ , de sorte que  $u'(t) = 2t - (a+b)$  et  $v(t) = f'(t)$ . Ces fonctions étant toutes de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[a; b]$ , nous pouvons procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt &= \underbrace{[(t-a)(t-b) f'(t)]_a^b}_{=0} - \int_a^b (2t - (a+b)) f'(t) dt \\
 &= -2 \int_a^b t f'(t) dt + (a+b) \int_a^b f'(t) dt \\
 &= -2 \left( [t f(t)]_a^b - \int_a^b f(t) dt \right) + (a+b) [f(t)]_a^b \\
 &= -2(bf(b) - af(a)) + 2 \int_a^b f(t) dt + (a+b)(f(b) - f(a)).
 \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité a été obtenu avec une nouvelle intégration par parties en posant  $u(t) = t$  et  $v'(t) = f'(t)$ , de sorte que  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = f(t)$ , en sachant que ces quatre fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[a; b]$ .

L'égalité précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) dt &= (bf(b) - af(a)) - \frac{1}{2}(a+b)(f(a) + f(b)) + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt \\
 &= \frac{1}{2}(bf(b) - af(a) - bf(b) + bf(a)) + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt \\
 \int_a^b f(t) dt &= \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt.
 \end{aligned}$$



V.6.2 En utilisant II.4, justifier que pour tout réel  $t$  de  $[a; b]$  :

$$0 \leq (t-a)(t-b) f''(t) \leq (t-a)(b-t).$$

Rappelons la résultat de la question II.4 : pour tout nombre réel  $x$  compris entre 0 et 1, on a  $-1 \leq f''(x) \leq 0$ . Ainsi, pour tout nombre réel  $t \in [a; b] \subset [0; 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} & -1 \leq f''(t) \leq 0 \\ \stackrel{t-a \geq 0}{\Rightarrow} & -(t-a) \leq (t-a) f''(t) \leq 0 \\ \stackrel{t-b \leq 0}{\Rightarrow} & 0 \leq (t-a)(t-b) f''(t) \leq -(t-a)(t-b) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq (t-a)(t-b) f''(t) \leq (t-a)(b-t). \end{aligned}$$

V.6.3 En utilisant V.6.1, déduire que :

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \leq \frac{1}{12} (b-a)^3.$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \stackrel{\text{V.6.1}}{=} \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt \\ \stackrel{\text{V.6.2}}{\Rightarrow} & 0 \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \leq \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(b-t) dt \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \leq \frac{1}{2} \left[ -\frac{t^3}{3} + (b+a) \frac{t^2}{2} - abt \right]_a^b \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b^3 - b^3}{3} + (b+a) \frac{b^2 - a^2}{2} - ab(b-a) \right) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b^3}{6} - \frac{a^3}{6} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2b}{2} \right) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{6} \right) = \frac{(b-a)^3}{12}. \end{aligned}$$

V.6.4 Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  strictement positif :  $0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{12n^2}$ .

Nous utilisons à nouveau le raisonnement effectué dans la question V.3 :

$$\begin{aligned} A - v_n &= \int_0^1 f(t) dt - \left( \frac{1}{2n} f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(1) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt - \frac{1}{2n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt - \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2} \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \right] \\ &\stackrel{\text{V.6.3}}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{1}{12} \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right)^3 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} = \frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

V.6.5 À partir de quelle valeur de  $n$  est-on sûr que  $v_n$  soit une valeur approchée de  $A$  à  $10^{-3}$  près ?

On sera sûr que  $v_n$  soit une valeur approchée de  $A$  à  $10^{-3}$  près lorsque les trois premiers chiffres après la virgule seront les mêmes, donc lorsque

$$A - v_n \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{12n^2} \leq 10^{-4} \Rightarrow n^2 \geq \frac{10^4}{12} \Rightarrow n \geq 28,87 \Rightarrow n \geq 29.$$

V.6.6 En notant  $p$  la valeur de  $n$  trouvée à la question précédente, déterminer une valeur approchée de  $v_p$  à la précision de la calculatrice. Ce résultat est-il en accord avec l'approximation à  $10^{-3}$  près de  $A$  obtenue à la partie III par lecture de la table de la loi normale centrée réduite ?

Posons donc  $p = 29$ . Avec la précision de la calculatrice, on trouve  $v_{29} \approx 0,8555642891$ . Par conséquent, une valeur approchée de  $A$  (donc de  $v_{29}$ ) à  $10^{-3}$  près est donc  $A \approx 0,856$ .

Ce résultat est ainsi en accord avec celui trouvé dans la partie III, puisqu'il s'agit du même.

# Géométrie

Ce problème a pour but d'établir l'inégalité isopérimétrique dans le cas des polygones convexes et d'établir le résultat suivant :

*parmi tous les polygones convexes ayant  $n$  côtés et un périmètre fixé  $p$ , le polygone régulier est de plus grande aire.*

Dans tout le problème, on admettra l'existence d'un polygone convexe d'aire maximale parmi tous les polygones convexes ayant le même nombre de côtés, la démonstration de cette existence dépassant les limites du programme du concours.

*Rappels et notations :*

On travaille dans le plan affine euclidien.

- Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points du plan (avec  $A \neq B$  et  $A \neq C$ ), on note  $\widehat{ABC}$  l'angle géométrique saillant (mesuré dans  $[0, \pi]$ ) délimité par les demi-droites  $[BA)$  et  $[BC)$ .
- La distance entre deux points  $A$  et  $B$  ainsi que la longueur du segment  $[AB]$  est notée  $AB$ .
- Par abus de notation, si  $(AH)$  est la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $A$ , on appellera également hauteur la longueur  $AH$  du segment  $[AH]$ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Par commodité d'écriture, on pourra noter  $\mathcal{P}(P)$  le périmètre d'un polygone  $P$  et  $\mathcal{A}(P)$  son aire.
- On dira que les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont super-semblables s'il existe une similitude qui transforme respectivement  $A$  en  $A'$ ,  $B$  en  $B'$  et  $C$  en  $C'$ .
- On rappelle qu'un quadrilatère est croisé s'il possède au moins deux côtés non consécutifs qui ont un point commun.
- On rappelle qu'un quadrilatère est convexe si ses sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quel côté du polygone.

Dans tout le problème, il sera possible d'affirmer sans démonstration rigoureuse qu'un polygone est convexe ou non, en se fiant à la configuration géométrique étudiée.

## Partie A - Résultat préliminaire

Dans cette partie, nous établissons le résultat suivant : « parmi tous les triangles dont on fixe le périmètre et un côté, celui qui a la plus grande aire est le triangle isocèle ».

On considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés du plan affine euclidien.

On note  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les mesures respectives dans angles géométriques  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CBA}$ ,  $\widehat{ACB}$  et on pose :

$$x = BC, \quad y = AC \quad \text{et} \quad c = AB.$$

On note  $S$  l'aire du triangle  $ABC$  et  $p$  son périmètre.

On fixe dans cette partie la base  $AB$  et le périmètre  $p$ .

A.1 Montrer que l'on a :

$$y^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \beta.$$

Cette relation est connue sous le nom de théorème d'Al-Kashi.

On note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .

Supposons l'angle  $\beta$  aigu. Dans le triangle  $AHB$  rectangle en  $H$ , on a alors :

- $\sin \widehat{HBA} = \frac{HA}{BA} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{HA}{c} \Leftrightarrow HA = c \sin \beta;$
- $\cos \widehat{HBA} = \frac{HB}{BA} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{HB}{c} \Leftrightarrow HB = c \cos \beta;$
- $CH = CB - BH = x - c \cos \beta$  si  $H \in [BC]$  ou  $CH = BH - BC = -(x - c \cos \beta)$  si  $H \in [BC] \setminus [BC]$ .

Supposons maintenant que l'angle  $\beta$  soit obtus. Dans ce cas,  $H \in [CB] \setminus [CB]$ . On a alors :

- $\sin \widehat{HBA} = \frac{HA}{BA} \Leftrightarrow \sin(\pi - \beta) = \frac{HA}{c} \Leftrightarrow HA = c \sin \beta;$
- $\cos \widehat{HBA} = \frac{HB}{BA} \Leftrightarrow \cos(\pi - \beta) = \frac{HB}{c} \Leftrightarrow HB = -c \cos \beta;$
- $CH = CB + BH = x - c \cos \beta.$

Dans les deux cas, le triangle  $AHC$  étant rectangle en  $H$ , on peut y appliquer le théorème de Pythagore afin de trouver

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Leftrightarrow y^2 = (c \sin \beta)^2 + (\pm(x - c \cos \beta))^2 \Leftrightarrow y^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \beta.$$

A.2 En déduire que :  $\sin \beta = \frac{1}{2cx} \sqrt{((c+x)^2 - y^2)(y^2 - (c-x)^2)}.$

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2cx} \sqrt{((c+x)^2 - y^2)(y^2 - (c-x)^2)} \\ &= \frac{1}{2cm} \sqrt{(2cx + c^2 + x^2 - y^2)(2cx + y^2 - c^2 - x^2)} \\ &\stackrel{A.1}{=} \frac{1}{2cx} \sqrt{(2cx + 2cx \cos \beta)(2cx - 2cx \cos \beta)} \\ &= \frac{1}{2cx} \sqrt{2cx(1 + \cos \beta) 2cx(1 - \cos \beta)} \\ &= \frac{1}{2cx} \sqrt{(2cx)^2 \sin^2 \beta} \\ &= \frac{1}{2cx} 2cx \sqrt{\sin^2 \beta} \stackrel{\sin \beta \geq 0}{=} \sin \beta. \end{aligned}$$

A.3 Montrer que :  $S = \frac{cx \sin \beta}{2}.$

L'aire d'un triangle est donnée par le demi-produit d'une base par sa hauteur. Autrement dit, et grâce aux travaux effectués dans la question A.1,

$$S = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{c \sin \beta \cdot x}{2} = \frac{cx \sin \beta}{2}.$$

A.4 En déduire la formule de Héron :

$$S = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) \left(\frac{p}{2} - x\right) \left(\frac{p}{2} - y\right)}.$$

En combinant les résultats des deux précédentes questions, on trouve :

$$\begin{aligned} S &= \frac{cx}{2} \frac{1}{2cx} \sqrt{((c+x)^2 - y^2)(y^2 - (c-x)^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(c+x+y)(c+x-y)(y-c+x)(y+c-x)} \\ &\stackrel{p=x+y+c}{=} \frac{1}{4} \sqrt{p(p-2y)(p-2c)(p-2x)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2^4 \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) \left(\frac{p}{2} - x\right) \left(\frac{p}{2} - y\right)} \\ &= \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) \left(\frac{p}{2} - x\right) \left(\frac{p}{2} - y\right)}. \end{aligned}$$

A.5 Montrer que  $S^2$  s'exprime sous la forme :  $S^2 = k(m-x)(c+x-m)$ , où  $k$  et  $m$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction de  $c$  et  $p$ . Prouver que la constante  $k$  est strictement positive.

D'après le calcul précédent, on a :

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) \left(\frac{p}{2} - x\right) \left(\frac{p}{2} - y\right) \\ &= \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) \left(\frac{p}{2} - x\right) \left(\frac{p}{2} - p + x + c\right) \\ &= \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) \left(\frac{p}{2} - x\right) \left(c + x - \frac{p}{2}\right). \end{aligned}$$

En posant  $k = \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right)$  et  $m = \frac{p}{2}$ , on trouve le résultat désiré :

$$S^2 = k(m-x)(c+x-m).$$

Enfin, puisque les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont non alignés, on a nécessairement que  $p > 0$  et  $x+y > c$  (inégalité triangulaire). Par conséquent,

$$x+y > c \Leftrightarrow p > 2c \Leftrightarrow \frac{p}{2} - c > 0 \Leftrightarrow \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - c\right) > 0 \Leftrightarrow k > 0.$$

A.6 Montrer que  $S^2$  atteint un maximum pour valeur de  $x$  que l'on déterminera en fonction de  $c$  et  $p$ .

En poursuivant un peu le calcul de  $S^2$ , on trouve :

$$S^2 = k(m-x)((c-m)+x) = k(-x^2 + (2m-c)x + m(c-m)).$$

On reconnaît un polynôme du second degré dont le coefficient principal est négatif :  $S^2$  atteint ainsi son maximum lorsque

$$x = \frac{-(2m - c)}{2(-1)} = m - \frac{c}{2}.$$

Remarque : Puisque  $x > 0$ ,  $m - \frac{c}{2} > 0$ .

A.7 En déduire que le triangle d'aire maximale est le triangle isocèle.

En effet,

$$x = m - \frac{c}{2} \Leftrightarrow x = \frac{p - c}{2} = \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = y.$$

Le triangle d'aire maximale est donc bien le triangle isocèle.

## Partie B - Cas de polygones particuliers

### B.I - Les triangles

B.I.1 Calculer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de son périmètre  $p$ .

Notons  $H$  le pied de la hauteur de  $A$  dans le triangle équilatéral  $ABC$ . Le point  $H$  est ainsi le milieu de  $[BC]$ . Par application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle  $AHC$ , on trouve :

$$AH = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2 - \left(\frac{p}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{9} - \frac{p^2}{36}} = \sqrt{\frac{3p^2}{36}} = p \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Par suite, l'aire de ce triangle rectangle est le demi-produit de sa base  $BC$  par sa hauteur  $AH$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} p \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{p}{3} = p^2 \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

B.I.2 On considère un triangle  $ABC$  de périmètre donné  $p$  et qui serait d'aire maximale parmi tous les triangles de même périmètre  $p$ .

B.I.2.1 On suppose dans cette question que  $BC \neq AC$ .

Montrer que l'on peut construire un triangle  $ABC'$  de périmètre  $p$  et d'aire plus grande que celle de  $ABC$ .

Puisque  $BC \neq AC$ , le triangle  $ABC$  n'est pas isocèle en  $C$ . D'après la question A.7, en gardant la même base  $AB$ , le triangle d'aire maximale est le triangle isocèle. En construisant le point  $C'$  tel que  $ABC'$  soit isocèle en  $C'$ , on obtient donc un triangle de même périmètre  $p$  et d'aire plus grande que celle de  $ABC$ .

B.I.2.2 En déduire que  $ABC$  est un triangle équilatéral.

La conclusion précédente contredit le fait que  $ABC$  est d'aire maximale. L'hypothèse de départ était donc fautive, entraînant  $BC = AC$ .  $ABC$ , d'aire maximale, est donc au moins un triangle isocèle en  $C$ . Supposons alors que  $AB \neq BC$  (de sorte que  $ABC$  ne soit pas isocèle en

B). Dans ce cas, et toujours d'après la question A.7,  $ABC$  n'est pas le triangle d'aire maximale. Il faudrait construire un point  $B'$  tel que  $AB'C$  soit isocèle en  $B'$  pour que son périmètre soit le même que celui de  $ABC$ , mais d'aire plus grande.

Des deux dernières questions, on en déduit que le triangle  $ABC$  d'aire maximale doit vérifier les deux conditions  $BC = AC$  et  $BC = AB$ , c'est-à-dire qu'il doit nécessairement être équilatéral.

B.I.3 Montrer que tous les triangles ayant un périmètre  $p$  et une aire  $S$  vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Conclure.

D'après la question précédente, tous les triangles ayant un périmètre  $p$  et une aire  $S$  ont donc une aire inférieure au égal à celle du triangle équilatéral de périmètre  $p$ . D'après la question B.I.1,  $S$  vérifie donc l'inégalité

$$S \leq p^2 \frac{\sqrt{3}}{36} = p^2 \sqrt{\frac{3}{1296}} = \sqrt{\frac{p^2}{432}} = \sqrt{\frac{p^2}{144 \cdot 3}} \Leftrightarrow S \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

On en déduit donc le résultat suivant :

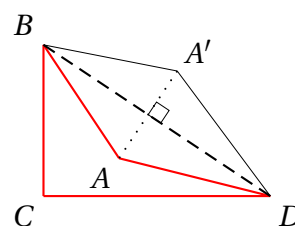
*parmi tous les polygones convexes ayant 3 côtés (les triangles) et un périmètre fixé  $p$ , le polygone régulier (le triangle équilatéral) est de plus grande aire.*

## B.II - Les quadrilatères

On considère un quadrilatère *non croisé*  $ABCD$  de périmètre fixé  $p$  et qui serait d'aire maximale parmi tous les quadrilatères non croisés de même périmètre  $p$ .

B.II.1 Montrer par l'absurde que  $ABCD$  est un quadrilatère convexe (quitte à effectuer une permutation circulaire des points  $A, B, C$  et  $D$ , on pourra supposer que le point  $A$  est à l'intérieur du triangle  $BCD$  et on pourra construire à partir de  $ABCD$  un quadrilatère non croisé de même périmètre et d'aire plus grande).

Supposons que  $ABCD$  soit un quadrilatère non convexe. Quitte à effectuer une permutation circulaire des points  $A, B, C$  et  $D$ , on suppose que le point  $A$  est à l'intérieur du triangle  $BCD$ . On note  $A'$  le symétrique du point  $A$  par rapport à la droite  $(BD)$ , de sorte que le point  $A'$  se trouve à l'extérieur du triangle  $BCD$ . Deux propriétés de la symétrie axiale nous assurent alors d'une part que  $AB = A'B$  et  $AD = A'D$ , de sorte que  $p = \mathcal{P}(ABCD) = \mathcal{P}(A'BCD)$ , et d'autre part que  $\mathcal{A}(BAD) = \mathcal{A}(BA'D)$ . Au niveau des aires, il vient alors que



$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(BCD) - \mathcal{A}(BAD) \\ \text{et } \mathcal{A}(A'BCD) &= \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(BA'D) = \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(BAD). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que  $\mathcal{A}(A'BCD) \geq \mathcal{A}(ABCD)$ , contredisant le fait que  $ABCD$  soit d'aire maximale. Notre hypothèse de départ était donc fautive, ce qui nous permet de conclure que  $ABCD$  est nécessairement un quadrilatère convexe.

B.II.2 On suppose dans cette question que  $AB \neq BC$ .

Prouver que l'on peut construire un quadrilatère non croisé de même périmètre que  $ABCD$  et d'aire plus grande.

Supposons que  $AB \neq BC$ . Le quadrilatère  $ABCD$  est constitué des deux triangles  $ACB$  et  $ACD$ . Si l'on ne touche pas au triangle  $ACD$ , et en particulier à sa base  $AC$ , la question A.7 nous assure qu'il existe un triangle  $AB'C$  isocèle en  $B'$  de même périmètre que  $ABC$  mais d'aire plus grande.

On construit le point  $B'$  dans le demi-plan délimité par  $(AC)$  et ne contenant pas le point  $D$ , de sorte que  $AB'CD$  soit un quadrilatère convexe. Par conséquent, l'assemblage du triangle  $AB'C$  et  $ACD$  forme le quadrilatère convexe  $AB'CD$  de même périmètre  $p$  que celui de  $ABCD$ , mais d'aire plus grande.

B.II.3 En déduire que  $ABCD$  est un losange.

La réponse de la question précédente contredit le fait que  $ABCD$  soit d'aire maximale. L'hypothèse de notre raisonnement par l'absurde était donc fautive, et on en déduit que  $AB = BC$ . Par permutation circulaire des points  $A, B, C$  et  $D$ , on montre de manière analogue que  $BC = CD$  et  $CD = DA$ .

Il s'en suit que les côtés du quadrilatère  $ABCD$  sont tous de même longueur, faisant du quadrilatère  $ABCD$  un losange.

B.II.4 On note  $\alpha = \widehat{BAD}$ . Calculer l'aire du losange  $ABCD$  en fonction de  $p$  et de  $\alpha$ .

Rappelons que  $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$ . On considère le losange  $ABCD$  de centre  $O$  et on se place dans le triangle rectangle  $AOD$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{AO}{AD} \Leftrightarrow AO = \frac{p}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow AC = \frac{p}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \text{et } \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{DO}{AD} \Leftrightarrow DO = \frac{p}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow BD = \frac{p}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{p^2}{8} \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \\ \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{p^2}{16} \sin \alpha. \end{aligned}$$

B.II.5 Pour quelle valeur de  $\alpha$  cette aire est-elle maximale ?

Puisque  $\alpha \in [0, \pi]$ ,  $\sin \alpha$  (et donc  $\mathcal{A}(ABCD)$  d'après la question précédente) est maximal lorsque  $\alpha = \pi/2$ .

B.II.6 En déduire que  $ABCD$  est un carré.

On en déduit que puisque  $ABCD$  est un losange d'aire maximale,  $\alpha = \widehat{BAD} = \pi/2$ , c'est-à-dire  $ABCD$  est un carré.



B.II.7 Montrer que tous les quadrilatères non croisés ayant un périmètre  $p$  et une aire  $S$  vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leq \frac{p^2}{16}.$$

Conclure.

La carré  $ABCD$  de périmètre  $p$  étant le quadrilatère non croisé de plus grande aire, tous les autres quadrilatères non croisés (donc convexes d'après la question B.II.1) ayant aussi un périmètre  $p$  et une aire  $S$  ont donc une aire inférieure au égal à celle de  $ABCD$ . D'après la question précédente,  $S$  vérifie donc l'inégalité

$$S \leq \frac{p^2}{16} \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow S \leq \frac{p^2}{16}.$$

On en déduit donc le résultat suivant :

*parmi tous les polygones convexes ayant 4 côtés (les quadrilatères convexes) et un périmètre fixé  $p$ , le polygone régulier (le carré) est de plus grande aire.*

## Partie C - Polygones ayant plus de quatre côtés

### C.I - Résultat auxiliaire

On suppose que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  et que les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont super-semblables. Montrer que l'on a :

$$BC \times B'C' = AB \times A'B' + AC \times A'C'.$$

Les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  étant super-semblables, on a l'existence d'un réel  $k > 0$  tel que :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} AB = kA'B' \\ BC = kB'C' \\ AC = kA'C' \end{cases}$$

De plus, le triangle  $ABC$  étant rectangle en  $A$ , on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 = AB^2 + AC^2 &\Leftrightarrow BC \times kB'C' = AB \times kA'B' + AC \times kA'C' \\ &\Leftrightarrow kBC \times B'C' = k(AB \times A'B' + AC \times A'C') \\ &\stackrel{k>0}{\Leftrightarrow} BC \times B'C' = AB \times A'B' + AC \times A'C'. \end{aligned}$$

### C.II - Cas des polygones à $n$ côtés

Dans cette partie,  $n$  est un entier fixé strictement plus grand que 4, et on considère des polygones convexes ayant  $n$  côtés. On suppose que trois sommets consécutifs ne sont pas alignés.

On appelle angle interne d'un polygone convexe tout angle géométrique saillant formé par un sommet du polygone et délimité par les deux côtés du polygone issus de ce sommet.

On considère un polygone  $P$  convexe ayant  $n$  côtés de périmètre fixé  $p$  et qui serait d'aire maximale parmi tous les polygones convexes ayant  $n$  côtés de même périmètre  $p$ .  
On note dans la suite  $A_1, A_2, \dots, A_n$  les  $n$  sommets consécutifs du polygone  $P$ .

C.II.1 Supposons que  $A_1A_2 \neq A_2A_3$ . Prouver que l'on peut construire un polygone  $P'$  convexe ayant  $n$  côtés de périmètre  $p$  et d'aire supérieur à celle de  $P$ .

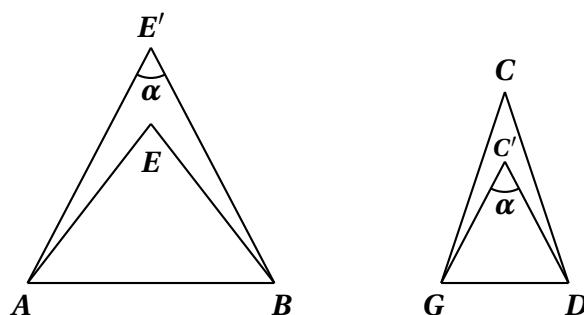
Le polygone convexe  $P$  est obtenu en combinant le triangle  $A_1A_2A_3$  et le polygone  $A_1A_3 \dots A_n$  (à  $n - 1$  côtés). Si l'on ne touche pas à ce dernier (donc en particulier au côté  $[A_1A_3]$ ), on peut construire un triangle  $A_1A'_2A_3$  (où le point  $A'_2$  se situe dans le demi-plan délimité par  $[A_1A_3]$  et contenant le point  $A_2$ ) isocèle en  $A'_2$  tel que son périmètre soit égal à celui du triangle  $A_1A_2A_3$  et son aire soit supérieure à celle de ce triangle (d'après la question A.7). En effet, la supposition  $A_1A_2 \neq A_2A_3$  implique que le triangle  $A_1A_2A_3$  n'est pas isocèle.

Par conséquent, le périmètre de  $P$  est le même que celui du polygone convexe  $A_1A'_2A_3 \dots A_n$ , appelé  $P'$ . Par contre, l'aire du polygone  $P'$  est supérieure à celle du polygone  $P$ .

C.II.2 En déduire que tous les côtés de  $P$  sont de même longueur.

La conclusion précédente contredit le fait que le polygone  $P$  est d'aire maximale. Par conséquent, notre hypothèse de départ est fautive, prouvant ainsi que  $A_1A_2 = A_2A_3$ . Par permutation circulaire des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , on démontre de manière analogue que  $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$  pour tout entier  $i \in \{2, n - 2\}$  et  $A_{n-1}A_n = A_nA_1$ . Il s'en suit que tous les côtés de  $P$  sont de même longueur.

On admet dans cette partie le résultat suivant, dû à Zénodore (mathématicien grec du II<sup>e</sup> siècle avant J.-C.).



À partir de deux triangles isocèles  $AEB$  et  $GCD$  tels que  $AE = EB = GC = CD$ , on peut construire deux autres triangles  $AE'B$  et  $GC'D$  qui vérifient les conditions suivantes :

- $AE'B$  et  $GC'D$  sont isocèles et semblables,
- $\mathcal{P}(AEB) + \mathcal{P}(GCD) = \mathcal{P}(AE'B) + \mathcal{P}(GC'D)$ ,
- $\mathcal{A}(AEB) + \mathcal{A}(GCD) < \mathcal{A}(AE'B) + \mathcal{A}(GC'D)$ .

Ce résultat sera démontré dans la partie III qui suit.

C.II.3 Supposons qu'il existe deux angles internes de  $P$  non consécutifs qui soient de mesure différente. En utilisant le résultat de Zénodore admis précédemment, montrer que l'on

peut construire un polygone  $P'$  de même périmètre que celui de  $P$  et d'aire plus grande.

Quitte à effectuer une permutation circulaire des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (rappelons que  $n > 4$ ), on peut supposer que les deux angles non consécutifs de  $P$  de mesure différente soient  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$  et  $\widehat{A_3 A_4 A_5}$ . D'après la question précédente, on a en particulier que  $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = A_4 A_5$ .

On peut ainsi appliquer le résultat de Zénodore dans les deux triangles isocèles  $A_1 A_2 A_3$  et  $A_3 A_4 A_5$  : il existe deux points  $A'_2$  et  $A'_4$  (on peut même supposer que  $A'_2$  se trouve dans le même demi-plan délimité par  $(A_1 A_3)$  que  $A_2$  et que  $A'_4$  se trouve dans le même demi-plan délimité par  $(A_3 A_5)$  que  $A_4$ ) tels que

- (i)  $A_1 A'_2 A_3$  et  $A_3 A'_4 A_5$  sont isocèles et semblables ;
- (ii)  $\mathcal{P}(A_1 A_2 A_3) + \mathcal{P}(A_3 A_4 A_5) = \mathcal{P}(A_1 A'_2 A_3) + \mathcal{P}(A_3 A'_4 A_5)$  ;
- (iii)  $\mathcal{A}(A_1 A_2 A_3) + \mathcal{A}(A_3 A_4 A_5) < \mathcal{A}(A_1 A'_2 A_3) + \mathcal{A}(A_3 A'_4 A_5)$ .

Notons que l'égalité (ii) est équivalente, en soustrayant par  $A_1 A_3$  et  $A_3 A_5$  dans chaque membre, à

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 = A_1 A'_2 + A'_2 A_3 + A_3 A'_4 + A'_4 A_5.$$

Notons  $P'$  le polygone convexe de sommets  $A_1, A'_2, A_3, A'_4, A_5, \dots, A_n$ . On constate d'une part que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(P') &= A_1 A'_2 + A'_2 A_3 + A_3 A'_4 + A'_4 A_5 + A_5 A_6 + \dots + A_{n-1} A_n + A_n A_1 \\ &\stackrel{(ii)}{=} A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + A_5 A_6 + \dots + A_{n-1} A_n + A_n A_1 \\ &= \mathcal{P}(P), \end{aligned}$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P') &= \mathcal{A}(A_1 A'_2 A_3) + \mathcal{A}(A_3 A'_4 A_5) + \mathcal{A}(A_5 \dots A_n A_1) \\ &\stackrel{(iii)}{>} \mathcal{A}(A_1 A_2 A_3) + \mathcal{A}(A_3 A_4 A_5) + \mathcal{A}(A_5 \dots A_n A_1) \\ &> \mathcal{A}(P). \end{aligned}$$

Nous venons de prouver qu'on peut construire un polygone  $P'$  convexe de même périmètre que celui de  $P$  mais d'aire plus grande.

#### C.II.4 Montrer que $P$ est un polygone régulier (on distinguera les cas où $n$ est impair ou pair).

La conclusion de la question précédente contredit le fait que  $P$  est d'aire maximale. On en déduit que notre hypothèse de départ est fautive. Par conséquent, deux angles internes non consécutifs de  $P$  sont nécessairement de même mesure. Distinguons alors deux cas :

**$n$  est impair :** Dans ce cas, la question précédente permet d'affirmer que

$$\widehat{A_n A_1 A_2} = \widehat{A_2 A_3 A_4} = \dots = \widehat{A_{n-1} A_n A_1} = \widehat{A_1 A_2 A_3} = \dots = \widehat{A_{n-2} A_{n-1} A_n}.$$

**$n$  est pair :** Si  $n$  est pair, alors  $n > 4 \Rightarrow n \geq 6$ . Un raisonnement analogue à la question précédente permettrait de démontrer que les angles  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$  et  $\widehat{A_4 A_5 A_6}$  sont égaux. Le résultat de la question précédente permet alors d'écrire que

$$\widehat{A_1 A_2 A_3} = \widehat{A_3 A_4 A_5} = \dots = \widehat{A_{n-1} A_n A_1} = \widehat{A_1 A_2 A_3} = \widehat{A_4 A_5 A_6} = \dots = \widehat{A_{n-2} A_{n-1} A_n}.$$

Quelque soit le nombre de sommets de  $P$ , on déduit de ces deux égalités que tous les angles internes de  $P$  sont de même mesure. Enfin, puisque tous les côtés de  $P$  sont de même longueur, il vient finalement que  $P$  est un polygone régulier à  $n$  côtés.

C.II.5 Montrer que tous les polygones convexes ayant un périmètre  $p$  et une aire  $S$  vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leq \frac{p^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}.$$

Conclure.

Calculons tout d'abord l'aire du polygone régulier  $P$  à  $n$  côtés, de centre  $O$  et de périmètre  $p$ . Pour simplifier, notons  $A$  et  $B$  deux sommets consécutifs de  $P$ , et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Puisque le triangle  $AOB$  est isocèle en  $O$ , on sait que la médiatrice de  $[AB]$  est aussi la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de  $O$  dans ce triangle. Le triangle  $AIO$  est donc rectangle en  $I$ . On aura donc

$$\mathcal{A}(P) = n \mathcal{A}(AOB).$$

Notons que  $\widehat{AOB} = 2\pi/n \Rightarrow \widehat{AOI} = \pi/n$ . Dans le triangle  $AOI$  rectangle en  $I$ , on aura donc :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{n} &= \frac{AI}{OI} \Leftrightarrow OI = \frac{AI}{\tan \frac{\pi}{n}} = \frac{\frac{p}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}} = \frac{p}{2n \tan \frac{\pi}{n}} \\ \Rightarrow \mathcal{A}(AOB) &= \frac{AB \times IO}{2} = \frac{1}{2} \frac{p}{n} \frac{p}{2n \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{p^2}{4n^2 \tan \frac{\pi}{n}} \\ \Rightarrow \mathcal{A}(P) &= n \frac{p^2}{4n^2 \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{p^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Puisque le polygone convexe  $P$  de périmètre  $p$  est le polygone convexe à  $n$  côtés d'aire maximale, tous les polygones convexes ayant un périmètre  $p$  et une aire  $S$  vérifient nécessairement l'inégalité :

$$S \leq \frac{p^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}.$$

On en déduit donc le résultat suivant :

*parmi tous les polygones convexes ayant  $n$  côtés et un périmètre fixé  $p$ , le polygone régulier est de plus grande aire.*

### C.III - Démonstration du résultat de Zénodore

On considère deux triangles isocèles non plats  $AEB$  et  $GCD$  tels que :

$$AE = EB = GC = CD,$$

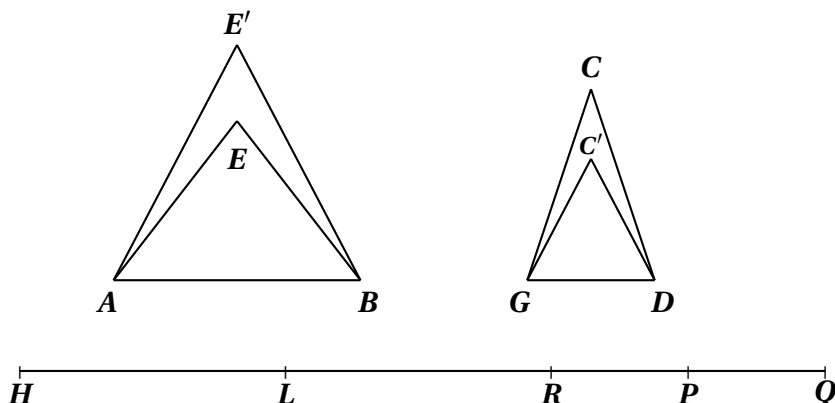
et on introduit deux points  $H$  et  $Q$  du plan tels que :

$$HQ = AE + EB + GC + CD = 4AE.$$

Soit  $R$  le point de  $[HQ]$  défini par  $\frac{HR}{RQ} = \frac{AB}{GD}$ .

Soit  $L$  le milieu de  $[HR]$  et  $P$  celui de  $[RQ]$ .

On suppose, sans restreindre la généralité, que  $AB > GD$ .



C.III.1 Montrer que  $HR + RQ > AB + GD$ .

Puisque  $AEB$  est un triangle isocèle non plat, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\begin{aligned}
 AE + EB > AB &\Leftrightarrow 4AE > 2AB \stackrel{AB > GD}{\Rightarrow} 4AE > AB + GD \\
 &\Leftrightarrow HQ > AB + GB \stackrel{R \in [HQ]}{\Leftrightarrow} HR + RQ > AB + GD.
 \end{aligned}$$

C.III.2 En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par  $GD$ , montrer que  $RQ > GD$ .  
En déduire que  $HR > AB$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 HR + RQ > AB + GD &\Leftrightarrow HR + RQ > \frac{GD \times HR}{RQ} + GD \\
 &\Leftrightarrow RQ > GD + HR \left( \frac{GD}{RQ} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons alors que  $RQ \leq GD$ . Alors

$$\frac{GD}{RQ} \geq 1 \Rightarrow HR \left( \frac{GD}{RQ} - 1 \right) \geq 0 \Rightarrow RQ > GD + HR \left( \frac{GD}{RQ} - 1 \right) \geq GD.$$

Nous aboutissons à la contradiction  $RQ > GD$ , prouvant que notre hypothèse de départ était fautive. Finalement, on a bien

$$RQ > GD.$$

Par suite,

$$RQ > GD \Leftrightarrow \frac{1}{GD} > \frac{1}{RQ} \stackrel{HR > 0}{\Leftrightarrow} \frac{HR}{GD} > \frac{HR}{RQ} = \frac{AB}{GD} \stackrel{GD > 0}{\Leftrightarrow} HR > AB.$$

On construit deux triangles  $AE'B$  et  $GC'D$  tels que (voir figure ci-dessus) :

$$AE' = E'B = HL = LR \quad \text{et} \quad GC' = C'D = RP = PQ.$$

C.III.3 Montrer que :  $AE' + E'B > \frac{HQ}{2}$  et  $GC' + C'D < \frac{HQ}{2}$ .

On a  $AB > GD \Rightarrow \frac{AB}{GD} = \frac{HR}{RQ} > 1 \Rightarrow HR > RQ$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} HR + RQ = HQ &\Rightarrow HR = HQ - RQ > HQ - HR \\ &\Leftrightarrow 2HR > HQ \Leftrightarrow HR > \frac{HQ}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, puisque  $AE' + E'B = 2HL = HR$ , on trouve bien que

$$AE' + E'B > \frac{HQ}{2}.$$

De même,  $GC' + C'D = 2RP = RQ$ , et

$$HQ = HR + RQ > 2RQ \Leftrightarrow RQ < \frac{HQ}{2} \Leftrightarrow GC' + C'D < \frac{HQ}{2}.$$

C.III.4 Montrer que les triangles  $AE'B$  et  $GC'D$  sont super-semblables.

On a que :

$$\frac{AB}{GD} = \frac{HR}{RQ} = \frac{2HL}{2RP} = \frac{AE'}{GC'} = \frac{E'B}{C'D}.$$

Les rapports entre les côtés du triangle  $AE'B$  et ceux du triangle  $GC'D$  sont égaux, prouvant que ces deux triangles sont super-semblables.

C.III.5 Montrer que la somme des périmètres de  $AEB$  et  $GCD$  est égale à la somme des périmètres de  $AE'B$  et  $GC'D$ .

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(AEB) + \mathcal{P}(GCD) &= AB + AE + EB + GD + GC + CD \\ &= AB + GD + 4AE = AB + GD + HQ \\ &= AB + GD + HL + LR + RP + PQ = AB + GD + AE' + E'B + GC' + C'D \\ &= \mathcal{P}(AE'B) + \mathcal{P}(GC'D). \end{aligned}$$

C.III.6.1 Montrer que  $HR > \frac{HQ}{2}$ .

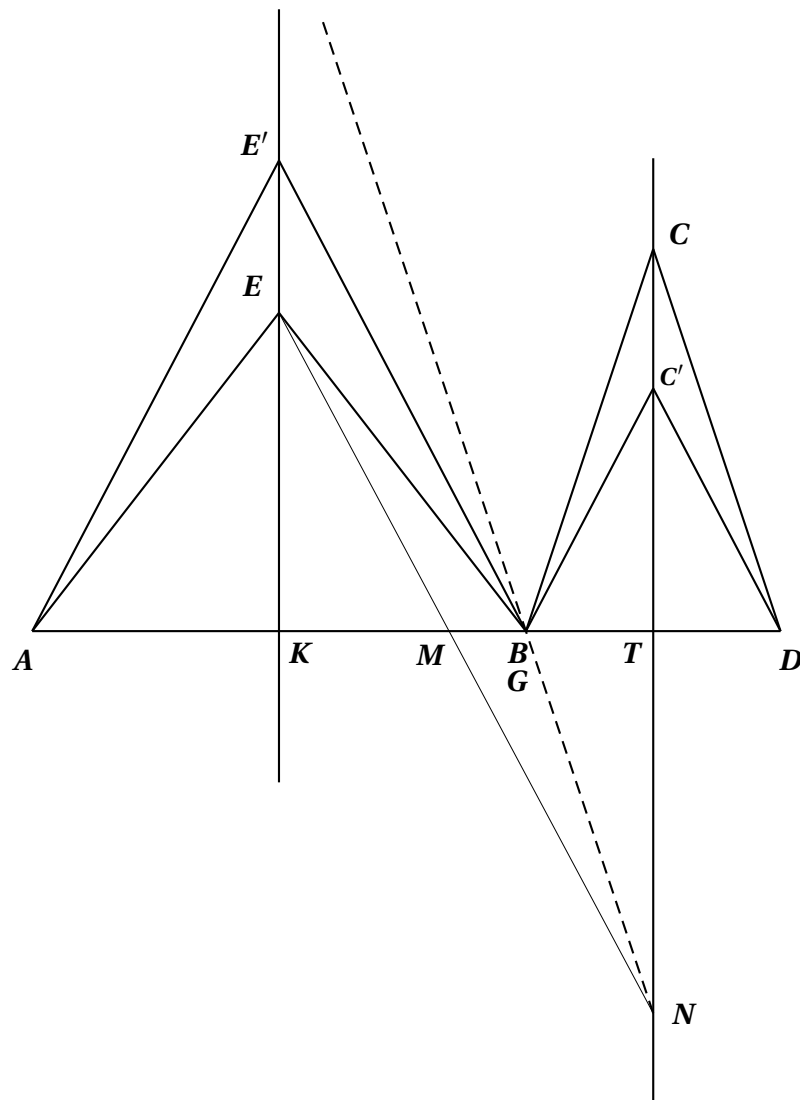
Cette inégalité a déjà été démontrée dans la résolution de la question C.III.3.

C.III.6.2 En déduire que  $AE' > AE$ . On admet que, par une démarche analogue, on peut montrer que  $GC' < GC$ .

En effet,

$$HR > \frac{HQ}{2} \Leftrightarrow 2AE' > \frac{4AE}{2} \Leftrightarrow AE' > AE.$$

C.III.7 Quitte à déplacer sans déformer le triangle  $GCD$ , on peut supposer sans restreindre la généralité que l'on se trouve dans la situation de la figure suivante.



On note dans la suite  $K$  le milieu de  $[AG]$ ,  $T$  celui de  $[GD]$  et  $N$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $T$ .

C.III.7.1 Montrer que  $(EE')$  est la médiatrice de  $[AG]$  et que  $(CC')$  est la médiatrice de  $[GD]$ .

Puisque les triangles  $AEG$ ,  $AE'G$ ,  $GCD$  et  $GC'D$  sont isocèles, les points  $E, E'$  (resp.  $C, C'$ ) sont à égale distance des points  $A$  et  $G$  (resp.  $G$  et  $D$ ).

Connaissant la propriété « si un point est à égale distance des deux extrémités d'un segment, alors il se trouve sur la médiatrice de ce segment », on en déduit que  $E, E'$  sont tous deux sur la médiatrice de  $[AG]$  et que  $C, C'$  sont sur la médiatrice de  $[GD]$ .

Enfin, puisqu'une médiatrice est une droite passant par deux points, on peut conclure que

$$(EE') \text{ (resp. } (CC')) \text{ est la médiatrice de } [AG] \text{ (resp. } [GD]).$$

### C.III.7.2 Montrer que $E'K > EK$ et que $C'T < CT$ .

Les triangles  $AKE$  et  $AKE'$  sont rectangles en  $K$ . On peut donc leur appliquer le théorème de Pythagore :

$$\begin{cases} AE^2 = AK^2 + KE^2 \\ AE'^2 = AK^2 + KE'^2 \end{cases} \Rightarrow AE^2 - KE^2 = AE'^2 - KE'^2.$$

Or, on a démontré que  $AE' > AE$ , donc :

$$AE'^2 > AE^2 \Leftrightarrow AE'^2 - KE'^2 > AE^2 - KE^2 = AE'^2 - KE'^2 \Leftrightarrow -KE^2 > -KE'^2 \Leftrightarrow E'K > EK.$$

De même, les triangles  $GTC$  et  $GTC'$  sont rectangles en  $T$ . On peut donc aussi leur appliquer le théorème de Pythagore :

$$\begin{cases} GC^2 = GT^2 + TC^2 \\ GC'^2 = GT^2 + TC'^2 \end{cases} \Rightarrow GC^2 - TC^2 = GC'^2 - TC'^2.$$

Or, on a admis que  $GC' < GC$ , donc on a également :

$$GC'^2 < GC^2 \Leftrightarrow GC'^2 - TC'^2 < GC^2 - TC^2 = GC'^2 - TC'^2 \Leftrightarrow -TC^2 < -TC'^2 \Leftrightarrow C'T < CT.$$

### C.III.7.3 Comparer les angles $\widehat{CGD}$ et $\widehat{EGA}$ et montrer que $\widehat{NGT} > \widehat{EGA}$ .

Dans les triangles rectangles  $EKG$  et  $GTC$ , on peut écrire :

$$\cos \widehat{EGA} = \frac{GK}{GE} \quad \text{et} \quad \cos \widehat{CGD} = \frac{GT}{GC} = \frac{GT}{GE}.$$

Par hypothèse,  $AG > GD$ , donc  $GK > GT$ , impliquant alors que  $\cos \widehat{CGD} < \cos \widehat{EGA}$ . Ce sont deux angles à la base de triangles isocèles : leur mesure ne peut donc être comprise qu'entre 0 et  $\pi/2$ . Or, sur cet intervalle, la fonction  $\cos$  est décroissante, impliquant donc que

$$\widehat{CGD} > \widehat{EGA}.$$

La symétrie centrale conserve les angles géométriques, et puisque  $D, G$  et  $N$  sont les images respectives des points  $G, D$  et  $C$  par la symétrie de centre  $T$ , on en déduit que  $\widehat{CGD} \stackrel{\text{isocèle}}{=} \widehat{CDG} = \widehat{NGD} \stackrel{T \in [GD]}{=} \widehat{NGT}$ . L'inégalité précédente devient alors

$$\widehat{NGT} > \widehat{EGA}.$$

On admet qu'alors la droite  $(NE)$  coupe  $[GK]$  en un point distinct de  $G$  que l'on notera  $M$ .



C.III.7.4 Montrer que les triangles rectangles  $E'GK$  et  $C'GT$  sont super-semblables.

En déduire que :  $E'G \cdot GC' - E'K \cdot C'T - KG \cdot GT = 0$ .

Puisque les triangles  $AE'G$  et  $GC'D$  sont super-semblables, des considérations d'angles dans les triangles  $E'GK$  et  $C'GT$  permettent de montrer très rapidement qu'ils sont aussi super-semblables.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{E'G}{GC'} &= \frac{E'K}{C'T} = \frac{KG}{GT} && \Rightarrow E'K \cdot GT = KG \cdot C'T \\ &&& \Leftrightarrow^{GC'>0} GC'(E'K \cdot GT - KG \cdot C'T) = 0 \\ &&& \Leftrightarrow^{C'T>0, GC'>0} \frac{E'K \cdot GC' \cdot GT - KG \cdot GC' \cdot C'T}{C'T^2 \cdot GC'^2} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{E'K \cdot GC'}{GT} \frac{GT^2}{C'T^2 \cdot GC'^2} - \frac{KG}{GC' \cdot C'T} = 0 \\ \text{Pyth.} &&& \Leftrightarrow \frac{E'K \cdot GC'}{GT} \left( \frac{GC'^2 - C'T^2}{C'T^2 \cdot GC'^2} \right) - \frac{KG}{GC' \cdot C'T} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{E'K \cdot GC'}{GT} \left( \frac{1}{C'T^2} - \frac{1}{GC'^2} \right) - \frac{KG}{GC' \cdot C'T} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{E'K \cdot GC'}{C'T^2 \cdot GT} - \frac{E'K \cdot GC'}{GC'^2 \cdot GT} - \frac{KG}{GC' \cdot C'T} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{E'K \cdot GC'}{C'T(C'T \cdot GT)} - \frac{E'K}{GC' \cdot GT} - \frac{KG}{GC' \cdot C'T} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{E'G}{C'T \cdot GT} \frac{GC'}{GC'} - \frac{E'K}{GC' \cdot GT} \frac{C'T}{C'T} - \frac{KG}{GC' \cdot C'T} \frac{GT}{GT} = 0 \\ &&& \Leftrightarrow E'G \cdot GC' - E'K \cdot C'T - KG \cdot GT = 0. \end{aligned}$$

C.III.7.5 En utilisant la question C.III.5, montrer que  $E'G + GC' > EN$ .

Notons que  $M \neq G$ . On peut donc utiliser l'inégalité triangulaire dans le triangle non plat  $ENG$  :

$$EN < EG + GN \Leftrightarrow EN < EG + GC \Leftrightarrow EN < \frac{HQ}{2}.$$

De plus, grâce à la question C.III.5 adaptée à notre cas où  $B = G$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(AEG) + \mathcal{P}(GCD) &= \mathcal{P}(AE'G) + \mathcal{P}(GC'D) \\ \Leftrightarrow AE + EG + AG + GC + CD + GD &= AE' + E'G + AG + GC' + C'D + GD \\ \Leftrightarrow E'G + GC' &= (AE + EG + GC + CD) - AE' - C'D \\ \Leftrightarrow E'G + GC' &= HQ - HL - PQ = HQ - \frac{1}{2}(HR + RQ) = \frac{HQ}{2}. \end{aligned}$$

En combinant cette égalité avec l'inégalité précédente, on trouve finalement que :

$$E'G + GC' > EN.$$

C.III.7.6.1 Montrer que :  $(E'G + GC')^2 = E'K^2 + KG^2 + GT^2 + C'T^2 + 2E'G \cdot GC'$ .

Puisque les triangles  $E'KG$  et  $GTC'$  sont rectangles, on peut leur appliquer le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}(E'G + GC')^2 &= E'G^2 + GC'^2 + 2E'G \cdot GC' \\ &= E'K^2 + KG^2 + GT^2 + C'T^2 + 2E'G \cdot GC'.\end{aligned}$$

C.III.7.6.2 En utilisant la question C.III.7.4, montrer que :  $(E'G + GC')^2 = (C'T + E'K)^2 + TK^2$ .

Nous avons la suite d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(E'G + GC')^2 &= E'K^2 + KG^2 + GT^2 + C'T^2 + 2E'G \cdot GC' \\ &\stackrel{\text{C.III.7.4}}{=} E'K^2 + KG^2 + GT^2 + C'T^2 + 2E'K \cdot C'T + 2KG \cdot GT \\ &= (C'T + E'K)^2 + (KG + GT)^2 \\ &= (C'T + E'K)^2 + TK^2.\end{aligned}$$

*Nous admettrons le résultat suivant :  $EN^2 = (EK + TN)^2 + TK^2$  (qui pourrait être démontré par une démarche analogue en introduisant le point  $M$ ).*

C.III.7.7.1 Montrer que l'on a :  $C'T + E'K > EK + TN$ .

D'après la question C.III.7.5, nous avons  $E'G + GC' > EN$ . Par conséquent, l'égalité admise dans la question précédent donne :

$$\begin{aligned}(E'G + GC')^2 > EN^2 &\Rightarrow (E'G + GC')^2 > (EK + TN)^2 + TK^2 \\ &\stackrel{\text{C.III.7.6.2}}{\Leftrightarrow} (C'T + E'K)^2 + TK^2 > (EK + TN)^2 + TK^2 \\ &\Leftrightarrow (C'T + E'K)^2 > (EK + TN)^2 \Rightarrow C'T + E'K > EK + TN.\end{aligned}$$

C.III.7.7.2 En déduire :  $EE' > C'C$ .

Rappelons que  $E'K > EK$  et  $C'T < CT$  (C.III.7.2). Cela nous permet d'affirmer que  $E \in [E'K]$  et  $C' \in [CT]$ . Par suite,

$$C'T + E'K > EK + TN \Leftrightarrow C'T + E'K > EK + TC \Leftrightarrow E'K - EK > TC - TC' \Leftrightarrow EE' > C'C.$$

C.III.7.8 Montrer que l'aire du quadrilatère  $AE'GE$  est strictement plus grande que celle du quadrilatère  $DCGC'$ .

On a, sachant que l'aire d'un triangle est le demi-produit d'une base par sa hauteur

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AE'GE) &= 2\mathcal{A}(AEE') = EE' \cdot AK = \frac{EE' \cdot AG}{2} \\ \text{et } \mathcal{A}(DCGC') &= 2\mathcal{A}(GCC') = CC' \cdot GT = \frac{CC' \cdot GD}{2}.\end{aligned}$$

On sait aussi (question précédente) que  $EE' > C'C$  et que  $AG > GD$  (par supposition sans restreinte de généralité au début de la partie III). Il vient directement que

$$\frac{EE' \cdot AG}{2} > \frac{CC' \cdot GD}{2} \Leftrightarrow \mathcal{A}(AE'GE) > \mathcal{A}(DCGC').$$

C.III.7.9 Enfin, montrer que l'on a :

$$\mathcal{A}(AEG) + \mathcal{A}(GCD) < \mathcal{A}(AE'G) + \mathcal{A}(GC'D).$$

Cette dernière inégalité s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(AE'G) - \mathcal{A}(AEG) > \mathcal{A}(GCD) - \mathcal{A}(GC'D) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{A}(AE'G) + \mathcal{A}(GC'D) > \mathcal{A}(GCD) + \mathcal{A}(AEG) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{A}(AEG) + \mathcal{A}(GCD) < \mathcal{A}(AE'G) + \mathcal{A}(GC'D). \end{aligned}$$

Les questions

- III.2 (où l'on construit les triangles  $AE'B$  et  $GC'D$  comme étant isocèles),
  - III.4 (où l'on démontre que les triangles  $AE'B$  et  $GC'D$  sont super-semblables),
  - III.5 (où l'on démontre que  $\mathcal{P}(AEB) + \mathcal{P}(GCD) = \mathcal{P}(AE'B) + \mathcal{P}(GC'D)$ ),
  - C.III.7.9 (où l'on démontre que, avec  $B = G$ ,  $\mathcal{A}(AEB) + \mathcal{A}(GCD) < \mathcal{A}(AE'B) + \mathcal{A}(GC'D)$ ),
- permettent de conclure que le résultat de Zénodore a été démontré.