CAPES externe 2012 de Mathématiques
Première composition : CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une
préparation à la philosophie – *Isocrate*

Problème 1 : continuité uniforme

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (x, y) \in I^2, \quad \big(|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\big).$$

1. **Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».**

   f n'est pas uniformément continue sur I se traduira par :

   $$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x, y) \in I^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon\big).$$

2. **On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x, y) d'éléments de I on a :**

   $$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

   Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

   Soit f une fonction lipschitzienne sur I de rapport $k > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon / k$, de sorte que $\eta > 0$ (car $k > 0$). Alors pour tout couple $(x, y) \in I^2$,

   $$|x-y| \leqslant \eta \overset{k>0}{\Rightarrow} k|x-y| \leqslant k\eta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant \varepsilon,$$

   donc f est bien uniformément sur I.

3. 3.1. **Montrer que pour tous réels x et y on a :**

   $$\big||y| - |x|\big| \leqslant |y-x|.$$

   Soient x, y deux réels. Commençons par démontrer la seconde partie de l'inégalité triangulaire :

   $$|y+x| \leqslant |y| + |x|. \qquad (\bigstar)$$

   D'une part, $y \leqslant |y|$ et $x \leqslant |x|$ impliquent $x + y \leqslant |x| + |y|$. De la même manière, $-y \leqslant |y|$ et $-x \leqslant |x|$ impliquent $-x - y \leqslant |x| + |y|$. Puisque $|x+y|$ est égal soit à $x+y$, soit à $-x-y$, il vient que $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

   Notons alors que :

   - ◇ $|y| = |x + (y-x)| \overset{(\bigstar)}{\leqslant} |x| + |y-x| \Leftrightarrow |y| - |x| \leqslant |y-x|$;
   - ◇ $|x| = |y + (x-y)| \overset{(\bigstar)}{\leqslant} |y| + |x-y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leqslant |x-y| = |y-x|$.

   Puisque $\big||y| - |x|\big|$ vaut soit $|y| - |x|$ soit $|x| - |y|$, on en déduit l'inégalité demandée.

3.2. **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1+|x|}}.$$

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \varepsilon$ et on considère deux réels x, y tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= \left|\frac{1}{1+|x|} - \frac{1}{1+|y|}\right| = \left|\frac{(1+|y|)-(1+|x|)}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| \\ &= \frac{\big||y|-|x|\big|}{(1+|x|)(1+|y|)} \overset{3.1.}{\leqslant} \frac{|y-x|}{(1+|x|)(1+|y|)} \\ &\leqslant |y-x| \leqslant \eta = \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4. 4.1. **Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a :**

$$\boldsymbol{\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{et} \qquad \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}.}$$

Soient x, y deux réels positifs. On a alors :

$$0 \leqslant 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \leqslant x + 2\sqrt{xy} + y \Leftrightarrow x+y \leqslant (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \overset{x,y\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}. \quad (\sharp)$$

Par suite,

- ◇ $\sqrt{y} = \sqrt{x+(y-x)} \leqslant \sqrt{x+|y-x|} \overset{(\sharp)}{\leqslant} \sqrt{x} + \sqrt{|y-x|} \Leftrightarrow \sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{|y-x|} = \sqrt{|x-y|}$;
- ◇ $\sqrt{x} = \sqrt{y+(x-y)} \leqslant \sqrt{y+|x-y|} \overset{(\sharp)}{\leqslant} \sqrt{y} + \sqrt{|x-y|} \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Puisque $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|$ vaut soit $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, soit $\sqrt{y}-\sqrt{x}$, on en déduit que

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

4.2. **Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.**

Soit $\varepsilon > 0$. Posons alors $\eta = \varepsilon^2 > 0$ de sorte que $\sqrt{\eta} = \varepsilon$. Alors

$$|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow \sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{\eta} \overset{4.1.}{\Rightarrow} |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \varepsilon,$$

donc la fonction racine carrée est bien uniformément continue sur R^+.

4.3. **Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.**

Supposons que g soit lipschitzienne de rapport $k > 0$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \neq y$, on a :

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant k|x-y| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| \leqslant k.$$

Or
$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},$$
et ce dernier n'est pas borné : autrement dit, il existe $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^+$ tel que $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-1} > k$. On aboutit à une contradiction prouvant que g n'est pas lipschitzienne.

5. 5.1. **En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

Notons que $0 \leqslant |x_n - y_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \overset{4.1.}{\leqslant} \sqrt{n+1-n} = 1$. On prouve aisément que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ réalise une bijection décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $]0,1]$. On a donc que pour tout $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - y_n| \leqslant \eta$ et, en posant $\varepsilon = 1/2$,
$$|h(x_n) - h(y_n)| = \left|\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2\right| = 1 > \varepsilon.$$
Au final, la fonction h n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, et ne l'est donc pas sur $\mathbb{R}$.

5.2. **La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?**

Par contraposée du résultat démontré à la question 2, on déduit directement que h n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

6. **Soit F une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:**
$$F(x) \leqslant ax + b.$$

6.1. **Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :**
$$\forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad \big(|x-y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant 1\big).$$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Par hypothèse,
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta_\varepsilon > 0, \forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon.$$
En choisissant en particulier $\varepsilon = 1$, il existera un η_ε particulier (notons-le η_1) tel que
$$\forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad |x-y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant 1.$$

6.2. **Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.**

$\mathbb{R}^+$ est archimédien : $\forall\, (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, a \neq 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \mid na \geqslant b$. Cette définition s'applique à notre cas car $a = \eta_1 > 0$ et $b = x_0 \geqslant 0$. On en déduit l'existence de n_0 tel que $\eta_1 n_0 \geqslant x_0 \Leftrightarrow x_0/n_0 \leqslant \eta_1$.

Par suite, n_0 est le plus petit entier tel que

$$\frac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1 \Leftrightarrow x_0 \leqslant \eta_1 n_0 \Leftrightarrow n_0 \geqslant \frac{x_0}{\eta_1}$$

donc on en déduit que, en utilisant la notation $[\cdot]$ pour la partie entière du nombre $\cdot$,

$$n_0 = \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1.$$

6.3. **Montrer que :**

$$\boldsymbol{|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.}$$

En transformant $F(x_0) - F(0)$ en somme téléscopique, on trouve que :

$$|F(x_0) - F(0)| = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right| \overset{(\bigstar)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.$$

6.4. **Conclure.**

Remarquons que

$$\left|\frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{kx_0}{n_0}\right| = \left|\frac{kx_0}{n_0} + \frac{x_0}{n_0} - \frac{kx_0}{n_0}\right| = \frac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1,$$

donc la question 6.1. nous assure que pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$,

$$\left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right| \leqslant 1.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0 \quad &\overset{6.3.}{\Rightarrow} \quad |F(x_0) - F(0)| \leqslant n_0 \\
&\Leftrightarrow \quad -n_0 \leqslant F(x_0) - F(0) \leqslant n_0 \\
&\Leftrightarrow \quad F(0) - n_0 \leqslant F(x_0) \leqslant F(0) + n_0 \\
&\overset{6.2.}{\Rightarrow} \quad F(x_0) \leqslant F(0) + \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1 \leqslant F(0) + \frac{x_0}{\eta_1} + 2.
\end{aligned}$$

Le choix de $a = 1/\eta_1$ et $b = 2 + F(0)$ suffit alors à conclure que $F(x_0) \leqslant ax_0 + b$. Autrement dit, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ est nécessairement majorée par une fonction affine.

7. 7.1. **Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?**

Non. L'idée est de prouver qu'une fonction polynôme P n'est pas bornée par une fonction affine. Supposons que P, définie pour l'occasion par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ (avec $a_n \neq 0$), soit uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. D'après la question précédente, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x > 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \leqslant ax + b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{i-1} \leqslant a + \frac{b}{x}.$$

Si $a_n > 0$, l'égalité précédente devient une contradiction en faisant tendre x vers $+\infty$.
Si $a_n < 0$, puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ on a $|P(x) - P(y)| = |-P(x) + P(y)|$, le polynôme $-P$ est uniformément continu. Le coefficient $-a_n$ étant positif, on montre de la même manière qu'on aboutit à une absurdité car $P(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$. Donc $-P$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, et donc P non plus.

7.2. **La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?**

Raisonnons par l'absurde en supposant que ce soit le cas. L'idée est toujours de montrer que cette fonction n'est pas majorée par une fonction affine. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$e^x \leqslant ax + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} \leqslant a + \frac{b}{x}.$$

En faisant tendre x vers l'infini, et par croissances comparées des fonctions exponentielles et $x \mapsto x$, on aboutit à une contradiction prouvant bien que la fonction exponentielle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, et donc pas non plus sur $\mathbb{R}$.

8. Théorème de Heine

Soit $I = [a, b]$ ($a < b$) un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine[1] : *si une fonction G est continue sur I, alors elle est uniformément continue sur I.*

On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a, b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

8.1. **Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:**

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon.$$

Puisque G n'est pas uniformément continue sur I, on a :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \text{ et } |G(x) - G(y)| > \varepsilon.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\eta = 1/n$. Pour chaque η, il existe un couple (x, y) vérifiant l'inégalité ci-dessus, on peut donc noter ce couple (x_n, y_n), et on en déduit finalement que :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, (x_n, y_n) \in I^2, \quad |x_n - y_n| \leqslant \eta \text{ et } |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon.$$

8.2. **Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:**

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon.$$

1. : Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand.

Puisque l'intervalle I est borné, les deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ le sont aussi. Donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (« de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge »), il existe une application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergent, et puisque $\sigma(n) \in \mathbb{N}^*$, le résultat de la question précédente est vérifié pour ces sous-suites, à savoir :

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon.$$

8.3. **Montrer que :**

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}.$$

Notons $\ell = \lim_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} \in I$ car I est fermé. On a donc

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N, |x_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais d'après la question précédente, on a aussi

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc il existe un rentier N' tel que pour tout $n \geqslant N'$, on a

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement,

$$\forall\, n \geqslant \max(N, N'), \quad |y_{\sigma(n)} - \ell| \overset{(\bigstar)}{\leqslant} |y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} y_{\sigma(n)} = \ell = \lim_{n\to\infty} x_{\sigma(n)}$.

8.4. **Conclure.**

En gardant les mêmes notations, le fait que G soit continue sur $I \ni \ell$ assure donc que

$$\lim_{n\to\infty} G(y_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to\infty} G(x_{\sigma(n)}) = G(\ell),$$

donc pour n suffisamment grand, on a $|G(y_{\sigma(n)}) - G(x_{\sigma(n)})| \leqslant \varepsilon$, ce qui contredit l'inégalité de la question 8.2. On en déduit que l'hypothèse de départ est fausse, c'est-à-dire que G est uniformément continue sur I.

9. **Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?**

Non. Il suffit de prendre n'importe quelle fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, ou la fonction exponentielle. Ces fonctions étant continues sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ (avec $a < b$), le théorème de Heine démontré à la question 8 nous assure qu'elles sont uniformément continue sur $[a, b]$. Mais d'après la question 7, elles ne sont pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1. On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1.1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned} k \leqslant t \leqslant k+1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\frac{t}{k+1}\right]_k^{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \left[\frac{t}{k}\right]_k^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

1.2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n),$$

puis que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Montrons d'abord l'inégalité suivante : $\forall\, x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$. Posons $f(x) = \ln(1+x) - x$ pour tout réel $x > -1$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$; sur cet intervalle, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

En notant que $f(0) = 0$, le tableau de variations de f est le suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$-x$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$1+x$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Pour tout $x > -1$, on a donc bien $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x$. Par suite, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1) \leqslant \ln(n)+\frac{1}{n}. \quad (\flat)$$

La double inégalité de la question 1.1. étant vraie pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
\Leftrightarrow\quad & H_n - 1 \leqslant [\ln(t)]_1^n \leqslant H_n - \frac{1}{n} \\
\Rightarrow\quad & \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1 \\
\overset{(\flat)}{\Rightarrow}\quad & \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1+\ln(n).
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on a alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} \\
\Leftrightarrow\quad & \underbrace{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \underbrace{1+\frac{1}{\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement, on a finalement :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Remarque : puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = +\infty$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ est divergente.

2. **On considère la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :**

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Montrer, à l'aide des outils de terminale scientifique, que la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on notera K la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer K).

Montrons que $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante : Soit $n \geqslant 1$. Alors :

$$K_{n+1} - K_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Montrons que $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée : Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}
k^2 \geqslant k^2-k \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&\Rightarrow \quad 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad K_n = \sum_{k=1}^{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2.
\end{aligned}$$

Or toute suite croissante et majorée est convergente, ce qui prouve que $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

3. **On pose pour tout entier naturel n non nul :**

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

On admet la formule de Stirling[2] **:**

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, grâce à la formule de Stirling, l'équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
a_n \quad &= \quad \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \quad \frac{\sqrt{n}}{4^n}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{1}{4^n}\frac{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi} = \frac{1}{4^n}\frac{\left(2^2\right)^n\sqrt{4\pi}}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Par propriété, il vient que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

4. **Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$

Soit n un entier non nul. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \quad &= \quad \frac{\dfrac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}} - 1 = \frac{\sqrt{n+1}}{4\cdot 4^n}\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2}\frac{4^n}{\sqrt{n}}\frac{(n!)^2}{(2n)!} - 1 \\
&= \quad \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}}(2n+1)(2n+2)\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}}2(2n+1)(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} - 1 \\
&= \quad \frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} - 1 = \frac{n+1+n-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

2. : James Stirling (1692-1770), mathématicien écossais.

5. **En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que pour tout entier $n \geqslant 1$:**

$$\boldsymbol{a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Dans le dernier quotient, le numérateur et le dénominateur sont tous deux strictement positifs, donc d'après la question précédente :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \overset{a_n>0}{\Leftrightarrow} \quad a_{n+1} > a_n.$$

On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Supposons alors qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_N > 1/\sqrt{\pi}$. Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{N+n} > a_N > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Par passage à la limite, on aboutit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{N+n} > \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

ce qui est absurde ! L'inégalité de l'énoncé s'en déduit.

6. 6.1. **Montrer que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.**

Pour tous réels a et b on a :

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)^2 \geqslant 4ab.$$

6.2. **En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :**

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}.}$$

Soit n un entier naturel non nul. En posant $a = \sqrt{n}$ et $b = \sqrt{n+1}$, l'inégalité précédente nous amène à écrire que :

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \geqslant 4\sqrt{n}\sqrt{n+1} \quad (>0) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\,(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2}{\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\,(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})\right)^2} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2}{\left(n - (n+1)\right)^2} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

7. 7.1. **Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:**

$$\mathbf{0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}.}$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. La première inégalité découle du fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Montrons la seconde :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n} & \overset{4.}{=} & \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow & a_{n+1}-a_n & = & \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\, a_n \\
 & & \overset{5.}{\leqslant} & \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,\sqrt{\pi}} \\
 & & \overset{6.2.}{\leqslant} & \dfrac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,\sqrt{\pi}} \\
 & & \leqslant & \dfrac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}.
\end{array}$$

7.2. **Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant k$:**

$$\mathbf{0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.}$$

Soient $k \geqslant 1$ un entier et $p \geqslant k$ un autre entier. La première inégalité découle toujours du fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $p \geqslant k$. Pour la seconde :

$$\begin{array}{rcl}
a_p - a_k & = & a_p - a_{p-1} + a_{p-1} - a_{p-2} + \cdots + a_{k+1} - a_k \\
 & \overset{7.1.}{\leqslant} & \dfrac{1}{8(p-1)p\sqrt{\pi}} + \dfrac{1}{8(p-2)(p-1)\sqrt{\pi}} + \cdots + \dfrac{1}{8k(k+1)\sqrt{\pi}} \\
 & = & \displaystyle\sum_{m=k}^{p-1} \frac{1}{8m(m+1)\sqrt{\pi}} \quad = \quad \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{m=k}^{p-1} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \\
 & = & \dfrac{1}{8\sqrt{\pi}} \underbrace{\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{p}\right)}_{\leqslant \frac{1}{k}} \quad \leqslant \quad \dfrac{1}{8k\sqrt{\pi}}.
\end{array}$$

7.3. **En déduire que, pour tout entier k non nul :**

$$\mathbf{0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.}$$

En faisant tendre p vers l'infini dans l'inégalité précédente, le résultat de la question 3 nous permet d'arriver à l'encadrement annoncé.

Partie B : marche aléatoire sur une droite

Soit $(O\,;\vec{\imath})$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.

Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité. Chaque saut est indépendant du précédent. La particule est à l'origine à l'instant $t=0$.

On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t=k$ et 0 sinon, et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $U_n = \sum_{k=0}^{2n} O_k$.

2. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que :

   1.1. $P(0_{2k+1} = 1) = 0$;

   Montrons par récurrence sur l'entier $k \geqslant 0$ que la particule se trouve à l'instant $t = 2k+1$ sur un point d'abscisse impaire.

   Initialisation ($k=0$) : À l'instant $t=0$, la particule se trouve à l'origine, elle se trouvera donc nécessairement au point d'abscisse 1 ou -1 à l'instant suivant.

   Hérédité : Supposons que la particule se trouve sur un point d'abscisse impaire i à l'instant $t = 2k+1$, et montrons que c'est encore vrai à l'instant $t = 2(k+1)+1 = 2k+3$. D'après l'énoncé, la particule sera au point d'abscisse $i+1$ ou $i-1$ à l'instant $t = 2k+2$. Par suite, elle se déplacera à l'instant d'après $t = 2k+3$ au point d'abscisse $i-2$, i ou $i+2$ qui sont impaires.

   Notre récurrence s'achève, et dans tous les cas, la particule est à l'instant $t = 2k+1$ sur un point d'abscisse différente de 0, donc $P(O_{2k+1} = 1) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$.

   1.2. $P(O_{2k} = 1) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{a_k}{\sqrt{k}}$.

   $O_{2k} = 1$ si la particule se trouve à l'origine à l'instant $t = 2k$. Au cours de son trajet, son abscisse aura nécessairement augmenté à k reprises d'une unité (et aussi régressé à k reprises d'une unité), il y a donc $\binom{2k}{k}$ trajets possibles. De plus, à chaque instant, elle a deux choix équiprobables possibles, soit $2^{2k} = 4^k$ possibilités totales pour ses $2k$ déplacements. Il vient donc que :

   $$P(O_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{a_k}{\sqrt{k}}.$$

3. Calculer l'espérance mathématiques $E(U_n)$ de la variable aléatoire U_n et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

   $$E(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1.$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(U_n) &= E\left(\sum_{k=1}^{2n} E(O_k)\right) = \sum_{k=0}^{2n} E(O_k) = \sum_{k=1}^{n} E(O_{2k}) + \sum_{k=0}^{n-1} E(O_{2k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(O_{2k}=1) + \sum_{k=0}^{n-1} P(O_{2k+1}=1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1.$

Initialisation ($n = 0$) : On calcule que :

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{(2+1)}{4}\binom{2}{1} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Hérédité : Supposons l'égalité vraie au rang n, et montrons qu'elle l'est toujours au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} &= \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} + \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} + \frac{4}{4^{n+1}} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)\,(n+1)^2}{(n!)^2(2n+2)\,(n+1)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} \left(1 + \frac{4(n+1)^2}{2n+2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} \left(\frac{4n^2+10n+6}{2n+2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} \left(\frac{2(2n+3)(n+1)}{2(n+1)}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Notre récurrence s'achève donc ici, prouvant bien que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$E(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1.$$

4. **En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.**

En poursuivant le calcul et en utilisant la formule de Stirling, on trouve que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} E(U_n) &= \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 = \frac{(2n+1)}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} - 1 \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)}{4^n} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{(2n+1)}{4^n} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Remarque : puisque $\frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on a que $E(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Cela signifie que notre marche aléatoire sur la droite reviendra une infinité de fois en l'origine.

Partie C : marche aléatoire sur un plan

Un plan est rapporté à un repère $(0\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Une particule située sur un point de coordonnées $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$ saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1,\ell+1)$, $(k+1,\ell-1)$, $(k-1,\ell+1)$ ou $(k-1,\ell-1)$ avec la même probabilité (c'est-à-dire qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'une carré). Chaque saut est indépendant du précédent. La particule est à l'origine à l'instant $t=0$.

On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t=k$ et 0 sinon, et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n\geqslant 1)$.

1. **Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.**

   Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $U_n=\sum\limits_{k=0}^{2n} O_k$.

2. **Pour tout $k\geqslant 1$, calculer $P(O_{2k+1}=1)$ et $P(O_{2k}=1)$.**

   Montrons d'abord par récurrence sur l'entier $k\geqslant 0$ que la particule se trouve à l'instant $t=2k+1$ sur un point de coordonnées impaires :

   Initialisation ($k=0$) : À l'instant $t=0$, la particule se trouve en l'origine. À l'instant d'après $t=1=2\cdot 0+1$, elle peut donc se retrouver sur les points de coordonnées $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ ou $(-1,-1)$ qui sont toutes impaires.

   Hérédité : Supposons que la particule se trouve à l'instant $t=2k+1$ en un point de coordonnées (x,y), où x,y sont impairs, et montrons que les coordonnées des points que la particule peut atteindre à l'instant $t=2(k+1)+1=2k+3$ sont également impaires. On récapitule les coordonnées possibles dans le tableau suivant :

$t=2k+1$	$t=2k+2$	$t=2k+3=2(k+1)+1$
(x,y)	$(x+1,y+1)$	$(x+2,y+2),(x+2,y),(x,y+2),(x,y)$
	$(x+1,y-1)$	$(x+2,y),(x+2,y-2),(x,y),(x,y-2)$
	$(x-1,y+1)$	$(x,y+2),(x,y),(x-2y+2),(x-2,y)$
	$(x-1,y-1)$	$(x,y),(x,y-2),(x-2,y),(x-2,y-2)$

   Puisque les nombres $x-2, x, x+2, y-2, y$ et $y+2$ sont impairs, notre récurrence s'achève ici.

   Par suite, la particule ne peut pas être en l'origine à l'instant $t=2k+1$, donc $P(O_{2k+1}=1)=0$.

   Soit maintenant un entier $k\geqslant 1$. $O_{2k}=1$ si la particule est en l'origine à l'instant $t=2k$. Nécessairement, l'abscisse de la particule aura augmenté à k reprises d'une unité (et donc aussi reculé à k reprises d'une unité) : elle a donc $\binom{2k}{k}$ choix possibles pour l'abscisse. Comme il en va de même pour l'ordonnée, elle a aussi $\binom{2k}{k}$ choix possibles pour l'ordonnée. Enfin, à chacun des $2k$ déplacements, la particule a quatre choix équiprobables, soit un total de 4^{2k} possibilités.

   Finalement,

$$P(O_{2k+1}=1)=0 \qquad \text{et} \qquad P(O_{2k}=1)=\frac{1}{4^{2k}}\binom{2k}{k}^2=\left(\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\right)^2=\frac{a_k^2}{k}.$$

3. **Montrer que l'espérance de U_n est donnée par :**

$$\boldsymbol{E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}.}$$

Par linéarité de l'espérance, et d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} E(U_n) &= E\left(\sum_{k=1}^{2n} E(O_k)\right) = \sum_{k=0}^{2n} E(O_k) = \sum_{k=1}^{n} E(O_{2k}) + \sum_{k=0}^{n-1} E(O_{2k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(O_{2k}=1) + \sum_{k=0}^{n-1} P(O_{2k+1}=1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}. \end{aligned}$$

4. **Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :**

$$\boldsymbol{\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}.}$$

Soit $k \geqslant 1$ un entier. D'après la question 5 de la partie A :

$$a_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad a_k^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{k\pi}.$$

La question 7.3 de la partie A donne, quant à elle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{8k\sqrt{\pi}} \leqslant a_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{8k}\right) \leqslant a_k \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{4k} + \frac{1}{64k^2}\right) \leqslant a_k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4k\pi} \leqslant \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4k\pi} + \frac{1}{64k^2\pi} \leqslant a_k^2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} \leqslant \frac{a_k^2}{k}. \end{aligned}$$

La double inégalité est ainsi démontrée.

5. **En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.**

L'inégalité précédente implique, pour $n \geqslant 1$ un entier :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2\pi}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}} = 1$$

Puisque $\sum k^{-2}$ est convergente (vers $\pi^2/6$) et $\sum k^{-1}$ est divergente, le théorème d'encadrement nous assure que lorsque $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \overset{A.1.2}{\underset{+\infty}{\sim}} \frac{\ln(n)}{\pi}.$$

Remarque : Ceci signifie encore une fois que $E(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, traduisant le fait que notre marche aléatoire sur le plan reviendra une infinité de fois en l'origine. En poursuivant, on démontre que ce résultat n'est plus vrai pour une marche aléatoire dans l'espace de dimension 3...

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

On se propose de déterminer s'il existe des entiers strictement positifs m et n $(m < n)$ vérifiant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k.$$

1. **Montrer que ce problème peut se ramener à la recherche d'entiers x, y, m et n $(0 < m < n)$ tels que :**

$$\begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 2m \\ x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

   En transformant quelque peu cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = n^2 + n - m^2 + m - m^2 - m = n^2 + n - 2m^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n^2 + 4n - 8m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 2m \\ x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.

2. **Écrire un algorithme permettant d'obtenir les solutions de (E) pour $y \leqslant 100$.**

   L'idée de l'algorithme est de créer une fonction `solutions(y)` prenant comme paramètre le nombre $y \leqslant 100$. On créerait une boucle sur l'entier x testant l'égalité $(E) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 2y^2$. Si le test donne un résultat positif, le couple (x, y) est solution, sinon non. Voici ce que cela pourrait donner :

```
Boucle : pour x allant de 1 à [sqrt(1+2y^2)]+1 faire
            si x^2=1+2y^2 alors affiche (x,y)
         fin boucle
```

   Remarque : implanté en programme, il ne sera pas très efficace pour répondre à la dernière question du sujet parce qu'il teste vraiment tous les nombres x possibles. Son exécution sera donc considérablement ralentie, ne serait-ce que pour déterminer la cinquième solution…

3. **Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E).**

   L'équation (E) suggère que $x > y$. On teste donc le couple $(2, 1)$: $2^2 - 2 \cdot 1^2 = 4 - 2 = 2 \neq 1$. On teste alors le couple $(3, 2)$:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1,$$

   et on en déduit que le couple $(3, 2)$ est la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E).

4. 4.1. **Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul :**

$$(3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}.$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Grâce à la formule du binôme de Newton, remarquons que

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2\sqrt{2})^i\,3^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^{n-i}\,2^i\,\sqrt{2}^i \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{i}3^{n-i}\,2^i\,\underbrace{\sqrt{2}^i}_{\in\mathbb{N}}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{i}3^{n-i}\,2^i\,\underbrace{\sqrt{2}^i}_{\in\sqrt{2}\mathbb{N}}}_{\in\sqrt{2}\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul, $(3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$. Notons par ailleurs que cette écriture nous donne $x_1 = 3$ et $y_1 = 2$.

4.2. **Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.**

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} &\overset{4.1}{=} (3+2\sqrt{2})^{n+1} = (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n \\ &\overset{4.1}{=} (3+2\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2}) = (3x_n + 4y_n) + (3y_n + 2x_n)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Puisque $(x_n), (y_n)$ sont des suites d'entiers, on en déduit par identification que

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = 3y_n + 2x_n.$$

4.3. **Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.**

Notons que pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n \neq 0$ implique que x_n et y_n ne s'annulent pas simultanément. Autrement dit, les quantités $x_n + 2y_n$ et $x_n + y_n$ sont strictement positives.

Par suite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n + 4y_n = 2(x_n + 2y_n) > 0 \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} - y_n = 2x_n + 2y_n = 2(x_n + y_n) > 0,$$

prouvant que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes. Puisque ce sont des suites réelles, on a nécessairement $x_n \geqslant n$ et $y_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

5. **Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de (E).**

Procédons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$:

Initialisation ($n = 1$) : $x_1^2 - 2y_1^2 = 3^2 - 2\cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$, donc (x_1, y_1) est bien solution de (E).

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons qu'il l'est encore pour $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 &\overset{4.1}{=} (3x_n + 4y_n)^2 - 2(2x_n + 3y_n)^2 \\ &= 9x_n^2 + 24x_n y_n + 16y_n^2 - 8x_n^2 - 24x_n y_n - 18y_n^2 \\ &= x_n^2 - 2y_n^2 \overset{\text{H.R.}}{=} 1 \end{aligned}$$

Cette récurrence démontre que pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de l'équation (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $S = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E). On suppose qu'il existe des couples (x, y) d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à S et on note (X, Y) le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. **Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.**

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X = x_n$. Alors nécessairement $Y \neq y_n$ pour éviter le cas $(X, Y) \in S$. Supposons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X \neq x_n$. Dans ce cas, on a aussi $Y \neq y_n$ car sinon on aurait

$$Y = y_n \quad \Rightarrow \quad x_n^2 - 2Y^2 = x_n^2 - 2y_n^2 \overset{5.}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad x_n^2 = 2Y^2 + 1.$$

Mais (X, Y) étant solution de (E), il vient que $X^2 - 2Y^2 = 1 \Leftrightarrow X^2 = 2Y^2 + 1$. On en déduit l'absurdité $X = x_n \ldots$

Dans tous les cas, (X, Y) solution de (E) implique que pour tout entier naturel n non nul, $Y \neq y_n$. Enfin, puisque les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et que pour tout $n \geqslant 1$

$$y_{n+1} - y_n = 2(\underbrace{x_n}_{\geqslant x_1 = 2} + \underbrace{y_n}_{\geqslant y_1 = 3}) \geqslant 10,$$

on en déduit qu'il existe un unique entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.

7. **Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.**

Sachant que $(x_1, y_1) = (3, 2)$, la question 5 et la stricte croissance des suites (x_n) et (y_n) nous assurent que pour tout $n \geqslant 1$

$$x_{n+1} - x_n = 2(x_n + 2y_n) \geqslant 2(x_1 + y_1) = 14 \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} - y_n = 2(x_n + y_n) \geqslant 2(x_1 + y_1) = 10.$$

L'algorithme permet de vérifier aisément que $(x_1 + 14, y_1 + 10) = (17, 12)$ est la prochaine solution (au sens de l'ordre choisi). En effet,

$$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 2 \cdot 144 = 289 - 288 = 1.$$

Par conséquent, $(x_2, y_2) = (17, 12)$, et donc aucune solution (X, Y) de (E) ne peut vérifier $y_1 < Y < y_2$. Finalement, $N \geqslant 2$.

8. **Montrer que :**

$$\boldsymbol{x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}.}$$

On remarque au préalable que

$$\begin{array}{rcll} y_N < Y < y_{N+1} & \Leftrightarrow & 2y_N^2 < 2Y^2 < 2y_{N+1}^2 & \\ & \Leftrightarrow & 1+2y_N^2 < 1+2Y^2 < 1+2y_{N+1}^2 & \\ & \Leftrightarrow & x_N^2 < X^2 < x_{N+1}^2 & \text{car } (x,N,y_N),(x_{N+1},y_{N+1}) \text{ et } (X,Y) \text{ sont solutions de } (E) \\ & \Leftrightarrow & x_N < X < x_{N+1} & \text{car } x_N, x_{N+1}, X > 0 \end{array}$$

De plus, $\sqrt{2} > 0 \Rightarrow y_N\sqrt{2} < Y\sqrt{2} < y_{N+1}\sqrt{2}$. Par addition membre à membre, on trouve finalement

$$x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}.$$

9. **En déduire que :**

$$\boldsymbol{x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X-4Y) + (3Y-2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}.}$$

Reprenons la double inégalité de la question précédente :

$$\begin{array}{cl} & x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X-4Y) + (3Y-2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2} \\ \overset{4.2.}{\Leftrightarrow} & (3+2\sqrt{2})^N < X + Y\sqrt{2} < (3+2\sqrt{2})^{N+1} \\ \overset{3+2\sqrt{2}\neq 0}{\Leftrightarrow} & (3+2\sqrt{2})^{N-1} < \dfrac{X+Y\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} < (3+2\sqrt{2})^N \\ \Leftrightarrow & (3+2\sqrt{2})^{N-1} < \dfrac{(X+Y\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} < (3+2\sqrt{2})^N \\ \Leftrightarrow & (3+2\sqrt{2})^{N-1} < 3X - 2X\sqrt{2} + 3Y\sqrt{2} - 2Y\sqrt{2}^2 < (3+2\sqrt{2})^N \\ \overset{N\geqslant 2 \text{ et } 4.2.}{\Leftrightarrow} & x_{N-1} + y_{N+1}\sqrt{2} < (3X-4Y) + (3Y-2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}. \end{array}$$

10. **Montrer que :**

10.1. $\boldsymbol{3X - 4Y > 0}$ **;**

Puisque (X, Y) est solution de (E), on a :

$$X^2 - 2Y^2 = 1 \Leftrightarrow X^2 = 1 + 2Y^2 \Rightarrow X^2 > 2Y^2 \Rightarrow X > Y\sqrt{2} \Leftrightarrow 3X > 3Y\sqrt{2}.$$

Mais puisque $3\sqrt{2} > 4$, il vient finalement que $3X > 4Y \Leftrightarrow 3X - 4Y > 0$.

10.2. $\boldsymbol{3Y - 2X > 0}$ **;**

Notons que $Y > y_N \overset{N\geqslant 2}{>} y_1 = 2$ implique que $Y - 2 > 0$. Par suite (n'oublions pas que (X, Y) est solution de (E)),

$$\begin{array}{rcl} Y - 2 > 0 & \overset{Y+2>0}{\Rightarrow} & (Y-2)(Y+2) > 0 \Leftrightarrow Y^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow 9Y^2 - 4 - 8Y^2 > 0 \\ & \Leftrightarrow & 9Y^2 - 4(1+2Y^2) > 0 \Leftrightarrow 9Y^2 - 4X^2 > 0 \Leftrightarrow (3Y-2X)(3Y+2X) > 0 \\ & \overset{3Y+2X>0}{\Rightarrow} & 3Y - 2X > 0. \end{array}$$

10.3. $\boldsymbol{3Y - 2X < Y}$;

Puisque (X, Y) est solution de (E), on a :

$$X^2 - 2Y^2 = 1 \Leftrightarrow X^2 = 1 + 2Y^2 \Rightarrow X^2 > Y^2 \Rightarrow 2Y - 2X < 0 \Leftrightarrow 3Y - 2X < Y.$$

10.4. **$(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E).**

Les questions 10.1 et 10.2 nous assurent que $(3X - 4Y, 3Y - 2X) \in (\mathbb{N}^*)^2$. De plus,

$$(3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = 9X^2 - 24XY + 16Y^2 - 18Y^2 + 24XY - 8Y^2 = X^2 - 2Y^2 = 1$$

car (X, Y) est solution de (E), donc $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est bien solution de (E).

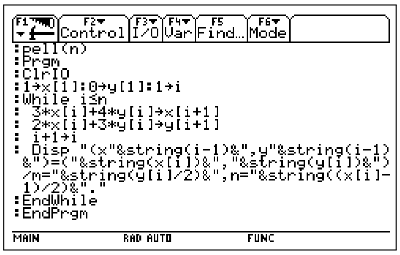
11. **Conclure.**

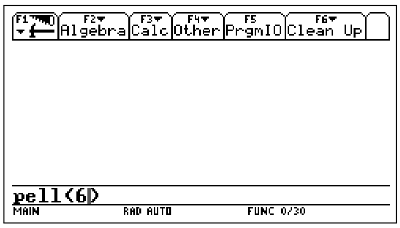
On a trouvé une solution de (E), n'appartenant pas à S (d'après la question 9) et telle que $3Y - 2X < Y$ (question 10.3) : cela contredit le fait que (X, Y) soit le plus petit couple de solutions de (E) n'appartenant pas à S (au sens de l'ordre choisi). Finalement, un tel couple (X, Y) n'existe donc pas (raisonnement par l'absurde).

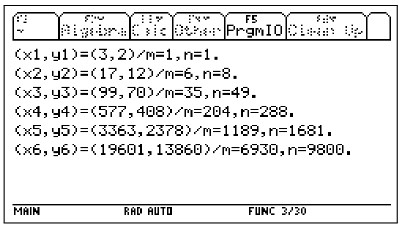
On avait déjà montré que S était inclus dans l'ensemble des solutions de (E), et on vient de démontrer qu'il n'existe pas de couple solutions de (E) qui ne soit pas dans S : S est donc bien l'ensemble des solutions de (E).

12. **Donner les cinq couples d'entiers (x, y) (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n.**

Grâce aux relations de la question 4.1, on peut implanter un programme `pell(n)` donnant les n premiers couples solutions de (E) et donc les $n - 1$ entiers n et m vérifiant l'égalité de départ (celle avec les sommes). Attention, le `n` de la fonction n'a rien à voir avec le n de l'équation !







La première ligne ne convient pas car l'énoncé impose $m < n$.