CAPES externe 2008 de Mathématiques
Première composition : CORRIGÉ

Alexis GONZÁLEZ & Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie – *Isocrate*

En plus des notations introduites dans l'énoncé, nous appellerons dans tout ce document $\mathscr{VB}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ à variations bornées. Autrement dit,

$$\mathscr{VB}(I,\mathbb{R}) = \left\{f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R}) \mid \exists\, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R}) \text{ croissante }, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R}) \text{ décroissante : } f = g + h\right\}.$$

Partie A : Premières propriétés

A.1 On rappelle dans l'énoncé qu'une fonction est *à variations bornées* lorsqu'il existe $g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$.

Soit f une fonction monotone définie sur I. Toute fonction monotone sur I est soit croissante sur I, soit décroissante sur I. Distinguons alors les deux cas de monotonie.

Premier cas : Supposons que f est une fonction croissante définie sur I. On peut décomposer f sous la forme $f = g + h$, avec $g = f$ et $h = 0$. Dans ce cas,

- g est croissante et appartient à $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, par définition de f.
- h est la fonction constante égale à 0 pouvant être considérée comme décroissante, elle appartient à $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.
  En effet, la fonction h vérifie bien : si x_1 et x_2 sont deux réels dans I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $h(x_1) = 0 \geqslant h(x_2) = 0$, ce qui traduit la décroissance de h.

Deuxième cas : Supposons que f est une fonction décroissante définie sur I. On peut décomposer f sous la forme $f = g + h$, avec $g = 0$ et $h = f$. Dans ce cas,

- g est la fonction constante égale à 0 pouvant être considérée comme croissante, elle appartient à $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.
  En effet, la fonction g vérifie bien : si x_1 et x_2 sont deux réels dans I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $g(x_1) = 0 \leqslant g(x_2) = 0$, ce qui traduit la croissance de g.
- h est décroissante et appartient à $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, par définition de f.

Dans les deux cas, f appartient à $\mathscr{VB}(I,\mathbb{R})$. Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\text{toute fonction monotone définie sur } I \text{ est à variations bornées}}.$$

A.2.a Par définition, une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si

(i) le vecteur nul de E appartient à F,

(ii) pour tous les vecteurs x et y de F, la somme $x + y$ appartient à F,

(iii) pour tout vecteur x de F et pour tout scalaire λ de $\mathbb{R}$, le produit λx appartient à F.

Il s'agit de vérifier ces trois conditions. Observons que, d'après la question précédente, toute fonction monotone définie sur I est à variations bornées, donc $\mathscr{VB}(I,\mathbb{R})$ est un ensemble non vide.

(i) La fonction constante $x \mapsto 0$ est le vecteur nul de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Elle peut se décomposer sous la forme $0 = g + h$, avec g une fonction croissante de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $h = -g$ qui est alors une fonction décroissante de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. <u>Le vecteur nul de l'espace $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est dans $\mathscr{VB}(I,\mathbb{R})$.</u>

(ii) Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$. Il existe alors deux fonctions croissantes g_1 et g_2 de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et deux fonctions décroissantes h_1 et h_2 de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ telles que $f_1 = g-1+h_1$ et $f_2 = g_2 + h_2$. Leur somme $f_1 + f_2$ s'écrit alors

$$f_1 + f_2 = (g_1 + h_1) + (g_2 + h_2) = (g_1 + g_2) + (h_1 + h_2),$$

ou encore

$$f_1 + f_2 = g + h, \text{ avec } \quad g = g_1 + g_2 \text{ et } h = h_1 + h_2.$$

La fonction qui résulte de la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) sur I est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I. Donc $g_1 + g_2$ est une fonction croissante sur I et $h_1 + h_2$ une fonction décroissante sur I. Comme $f_1 + f_2 = g + h$, avec g croissante sur I et h décroissante sur I, on a $\underline{f_1 + f_2 \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})}$.

(iii) Soit f un élément de $\mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$ et λ un scalaire réel quelconque. Il existe $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$. Évaluons λf selon les valeurs de λ. Distonguons pour cela trois cas :

Supposons $\boldsymbol{\lambda > 0}$: Dans ce cas, $\lambda f = \lambda(g + h) = \lambda g + \lambda h$. Or λg est une fonction croissante sur I et λh est une fonction décroissante sur I. Donc $\lambda f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$.

Supposons $\boldsymbol{\lambda < 0}$: Dans ce cas, $\lambda f = \lambda(g + h) = \lambda g + \lambda h$. Or λg est une fonction déroissante sur I et λh est une fonction croissante sur I. Ainsi, on peut écrire λf sous la forme $\lambda f = G + H$, avec $G = \lambda h$ (fonction croissante sur I) et $H = \lambda g$ (fonction décroissante sur I), de sorte que $\lambda f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$.

Supposons $\boldsymbol{\lambda = 0}$: Dans ce cas, $\lambda f = 0 \cdot f = 0$. Nous savons déjà que le vecteur nul de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$.

On en déduit que pour toute fonction $f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\underline{\lambda f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})}$.

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble

$$\boxed{\mathcal{VB}(I,\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(I,\mathbb{R})}.$$

A.2.b Il s'agit de vérifier que $\mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions qui sont combinaison linéaire de fonctions croissante sur I. Soit $f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$. Par définition, il existe $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$. On peut ainsi décomposer f sous la forme $f = g - (-h)$, où g et $-h$ sont deux fonctions croissantes sur I.

f est donc une combinaison linéaire de deux fonctions croissantes. On en déduit que ce sous-espace

$$\boxed{\mathcal{VB}(I,\mathbb{R}) \text{ est engendré par l'ensemble des fonctions croissantes sur } I}.$$

A.3 Soit $\alpha \in I$. f est une fonction à variations bornées : par définition, il existe $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$. Pour tout réel $x \in I$, on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = g(x) + h(x) + g(\alpha) - g(\alpha) = \big(g(x) - g(\alpha)\big) + \big(h(x) - g(\alpha)\big).$$

Considérons alors les fonctions k et l définies sur I par

$$k(x) = g(x) - g(\alpha) \qquad \text{et} \qquad l(x) = h(x) - g(\alpha).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, on a $f(x) = k(x) + l(x)$. La fonction g étant croissante sur I, il en est de même pour la fonction k. La fonction h étant décroissante sur I, il en est de même pour la fonction l.

Ces fonctions sont en fait associées respectivement à g et h, ce qui signifie ici que leur courbe représentative est obtenue respectivement à partir de la courbe représentant g et celle représentant h par la translation de vecteur respectivement $-g(alpha)\vec{\jmath}$ et $g(\alpha)\vec{\jmath}$.

Remarquons de plus que $k(\alpha) = g(\alpha) - g(\alpha) = 0$. Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour toute } f \in \mathscr{VB}(I,\mathbb{R}),\text{ il existe } k = g - g(\alpha) \text{ croissante sur } I \text{ et} \\ l = h - g(\alpha) \text{ décroissante sur } I \text{ telle que } f = k + l \text{ et } k(\alpha) = 0.\end{array}}$$

A.4 a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$. Si $f = g + h$, alors $g = f - h$ ou $h = f - g$. En particulier,

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(a) & = & f(a) - h(a) \\ g(b) & = & f(b) - h(b) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} h(a) & = & f(a) - g(a) \\ h(b) & = & f(b) - g(b). \end{array}\right.$$

Comme g est croissante sur I, si $a < b$, alors $g(a) \leqslant g(b)$, c'est-à-dire $f(a) - h(a) \leqslant f(b) - h(b)$, d'où

$$h(b) - h(a) \leqslant f(b) - f(a).$$

Comme h est décroissante sur I, si $a < b$, alors $h(a) \geqslant h(b)$, c'est-à-dire $f(a) - g(a) \geqslant f(b) - g(b)$, d'où

$$g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a).$$

On obtient bien la double-inégalité demandée :

$$\boxed{\text{si } a < b, \text{ alors } g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a) \geqslant h(b) - h(a)}.$$

A.5 f est une fonction à variations bornées : par définition, il existe $g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[a, b]$, où a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$. On a $f(x) = g(x) + h(x)$.

Comme g est croissante sur I, si $a \leqslant x \leqslant b$, alors $g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(b)$, soit

$$g(a) + h(x) \leqslant g(x) + h(x) \leqslant g(b) + h(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(a) + h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(b) + h(x).$$

Comme h est croissante sur I, si $a \leqslant x \leqslant b$, alors $h(b) \leqslant h(x) \leqslant h(a)$, soit

$$h(b) + g(x) \leqslant h(x) + g(x) \leqslant h(a) + g(x) \quad \Leftrightarrow \quad h(b) + h(x) \leqslant f(x) \leqslant h(a) + g(x).$$

Exploitons ces inégalités pour retrouver le résultat.

Comme $h(x) \leqslant h(a)$, on a $f(x) \leqslant g(b) + h(x) \leqslant g(b) + h(a)$. Autrement dit, f est majorée sur $[a, b]$ par $g(b) + h(a)$.
Comme $g(a) \leqslant g(x)$, on a $h(b) + g(a) \leqslant h(b) + g(x) \leqslant f(x)$. Autrement dit, f est minorée sur $[a, b]$ par $h(b) + g(a)$.

Une fonction est bornée sur un segment si elle est à la fois majorée et minorée sur ce segment. Puisque f est majorée par $g(b)+h(a)$ et minorée par $h(b)+g(a)$ sur le segment $[a,b]$, nous pouvons conclure que

$$\boxed{\text{toute fonction } f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R}) \text{ est bornée sur le segment } [a,b]}.$$

A.6 Comme $f \in \mathcal{VB}(I,\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g+h$. Notons I° l'ensemble des points intérieurs à I. Montrons que g admet, en tout point de I°, une limite à droite et une limite à gauche.

RAPPELS DE COURS : Soient g une fonction définie sur I et x_0 un point adhérent à I. On dit que ℓ est limite de g en x_0 *si*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in I, \quad |x - x_0| \Rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- *Si $I =]x_0 - \alpha, x_0[$ où $\alpha > 0$, on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = \ell$ et dans ce cas, ℓ est appelée* limite à gauche de g en x_0 *;*
- *Si $I =]x_0, x_0 + \alpha[$ où $\alpha > 0$, on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \ell$ et dans ce cas, ℓ est appelée* limite à droite de g en x_0.

Par propriété des valeurs absolues, nous pouvons écrire les équivalences suivantes :

$$|x - x_0| < \eta \Leftrightarrow -\eta < x - x_0 < \eta \Leftrightarrow x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \quad \text{et}$$
$$|g(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon.$$

g est une fonction définie sur I, elle est donc définie sur tout intervalle de la forme $]\alpha, \beta[$ inclus dans I (avec $\alpha, \beta > 0$). a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$. Soit x_0 un point de I°. x_0 est un point adhérent à I car I° est contenu dans l'ensemble des points adhérents à I. On peut choisir de prendre $a < x_0$. Considérons l'ensemble $A = \{g(x) \mid a < x < x_0\}$. Cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car il y a une infinité de nombres réels dans l'intervalle $]a, x_0[$. Par croissance de la fonction g, on peut écrire : $g(a) < g(x) < g(x_0)$. Ce qui justifie que $g(x_0)$ est un majorant de A.

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Notons $\sup(A)$ la borne supérieure de A. Par définition de la borne supérieure, pour tout $g(x) \in A$, on a $g(x) \leqslant \sup(A)$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $g(x_1) \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < g(x_1)$. Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $x_1 \in]a, x_0[$ tel que

$$\sup(A) - \varepsilon < g(x_1) < g(x) \leqslant \sup(A) < \sup(A) + \varepsilon.$$

De plus, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $x_0 - \eta < x_1$. Donc, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout réel $x \in]x_1, x_0[$, on a $x_0 - \eta < x_1 < x < x_0 < x_0 + \eta$, c'est-à-dire plus concrètement $x - 0 - \eta < x < x_0 + \eta$. Il s'ensuit que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in]x_1, x_0[, \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - \sup(A)| < \varepsilon.$$

On reconnaît la définition de la limite à gauche de g en x_0.

On a ainsi démontré que toute fonction croissante admet une limite à gauche en tout point x_0 de $I°$ et dans notre démonstration, elle se note

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \sup(A).$$

On procède de la même façon pour montrer l'existence de la limite à droite de g en $x_0 \in I°$, et on en déduit que toute fonction croissante admet une limite à gauche et à droite en tout poinr intérieur à I.

Si h est décroissante, alors $-h$ est croissante. En remplaçant g par $-h$, on arrive à démontrer comme précédemment que tout fonction décroissante admet une limite à gauche et à droite en tout point intérieur à I.

THÉORÈME DE COURS :
- *Si* $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \ell_1$ *et* $\lim_{x \to x_0^-} h(x) = \ell_2$, *alors* $\lim_{x \to x_0^-} g(x) + h(x) = \ell_1 + \ell_2$.
- *Si* $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \ell_1$ *et* $\lim_{x \to x_0^+} h(x) = \ell_2$, *alors* $\lim_{x \to x_0^+} g(x) + h(x) = \ell_1 + \ell_2$.

Par ce théorème, on peut conclure que

> en tout point intérieur à I, la fonction f admet une limite à gauche et une limite à droite.

Partie B : Fonctions de longueur bornée

En introduction de la partie B, on définit une notion de longueur bornée et de longueur pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. *Son objectif est d'établir des propriétés générales sur cette notion : une inégalité triangulaire, une relation de Chasles…*

Dans cette partie, on considère f et g dans $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et a, b, c trois éléments de I tels que $a < b < c$. Nous noterons $\mathscr{LB}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de longueur bornée sur $[a, b]$.

B.1 Quelque soit la subdivision $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ choisie de $[a, b]$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_0 = a$ et $\sigma_p = b$, on a que pour tout entier $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\left| f(\sigma_i) - f(\sigma_{i+1}) \right| \geqslant 0$, d'où

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{p} \left| f(\sigma_i) - f(\sigma_{i+1}) \right| \geqslant 0.$$

Ce qui signifie que $\sup_{\sigma} \left\{ \ell(\sigma, f) \mid \sigma \text{ est une subdivision de } [a, b] \right\} \geqslant 0$, soit

$$\boxed{L_a^b(f) \geqslant 0}.$$

B.2 On suppose que $f \in \mathscr{LB}([a,b],\mathbb{R})$. Considérons alors une subdivision $\sigma = (\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de $[a,b]$ ($p \in \mathbb{N}^*$) vérifiant $\sigma_0 = a$ et $\sigma_p = b$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|f(b)-f(a)\right| &= \left|f(\sigma_p)-f(\sigma_0)\right| \\
&= \left|f(\sigma_p)-f(\sigma_{p-1})+f(\sigma_{p-1})-f(\sigma_{p-2})+\cdots+f(\sigma_2)-f(\sigma_1)+f(\sigma_1)-f(\sigma_0)\right| \\
&\leqslant \left|f(\sigma_p)-f(\sigma_{p-1})\right|+\left|f(\sigma_{p-1})-f(\sigma_{p-2})\right|+\cdots+\left|f(\sigma_2)-f(\sigma_1)\right|+\left|f(\sigma_1)-f(\sigma_0)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p}\left|f(\sigma_i)-f(\sigma_{i-1})\right| \quad = \quad \ell(\sigma,f) \\
&\leqslant \sup_{\sigma}\left\{\ell(\sigma,f) \mid \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\right\} \quad = \quad L_a^b(f).
\end{aligned}$$

Le premier symbole d'inégalité s'explique par l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues : pour tous réels α, β, on a

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

D'où le résultat demandé :

$$\boxed{\left|f(b)-f(a)\right| \leqslant L_a^b(f)}.$$

B.3 On suppose que f et g sont de longueur bornée sur $[a,b]$. Il existe donc deux réels Λ_f et Λ_g tels que pour toutes subdivisions σ_f et σ_g de $[a,b]$, on a

$$\ell(\sigma_f,f) < \Lambda_f \qquad \text{et} \qquad \ell(\sigma_g,g) < \Lambda_g.$$

Soit alors $\sigma = (\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de $[a,b]$ ($p \in \mathbb{N}^*$) vérifiant $\sigma_0 = a$ et $\sigma_p = b$, une subdivision quelconque de $[a,b]$. Dans ce cas, on a en particulier que $\ell(\sigma,f) < \Lambda_f$ et $\ell(\sigma,g) < \Lambda_g$. De plus, toujours en utilisant l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues pour expliquer l'inégalité qui suit,

$$\begin{aligned}
\ell(\sigma,f+g) &= \sum_{i=1}^{p}\left|(f+g)(\sigma_i)-(f+g)(\sigma_{i-1})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left|f(\sigma_i)-f(\sigma_{i-1})+g(\sigma_i)-g(\sigma_{i-1})\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p}\left|f(\sigma_i)-f(\sigma_{i-1})\right|+\left|g(\sigma_i)-g(\sigma_{i-1})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left|f(\sigma_i)-f(\sigma_{i-1})\right|+\sum_{i=1}^{p}\left|g(\sigma_i)-g(\sigma_{i-1})\right| \\
&= \ell(\sigma,f)+\ell(\sigma,g).
\end{aligned}$$

Enfin, puisque $\ell(\sigma,f)+\ell(\sigma,g) < \Lambda_f+\Lambda_g$, il vient par transitivité d'ordre que $\ell(\sigma,f+g) < \Lambda_f+\Lambda_g$. On en déduit qu'il existe un réel $\Lambda = \Lambda_f+\Lambda_g$ tel que, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a $\ell(\sigma,f+g) < \Lambda$, donc

$$\boxed{f+g \text{ est de longueur bornée sur } [a,b]}.$$

B.4 B.4.a

B.4.b

B.4.c

B.4.d

B.5 B.5.a

B.5.b

B.6