

INTRODUCTION

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et on définit la norme d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Soit a un vecteur de \mathbb{R}^n non nul, on note s_a la symétrie orthogonale de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad s_a(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a$$

On dit qu'une partie R de \mathbb{R}^n est un **système de racines** dans \mathbb{R}^n si elle vérifie les conditions suivantes :

- la partie R est finie, ne contient pas 0 et engendre le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n ;
- pour tout $\alpha \in R$, $s_\alpha(R) = R$ (en particulier $-\alpha \in R$) ;
- pour tous $\alpha, \beta \in R$, $n_{\alpha, \beta} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$
- pour tout $\alpha \in R$, les seuls éléments de R proportionnels à α sont α et $-\alpha$.

Les coefficients $n_{\alpha, \beta}$ ($\alpha, \beta \in R$) sont appelés les **coefficients de structure** du système de racines R .

On dit que deux systèmes de racines R et R' sont des **systèmes de racines isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\varphi(R) = R' \quad \text{et} \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad n_{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)} = n_{\alpha, \beta}$$

Dans la partie I, on étudie les systèmes de racines du plan. Cette partie permet de se familiariser avec cette notion et d'avoir des exemples sur lesquels s'appuyer pour la suite du problème. Puis dans la partie II, on étudie des relations d'ordre total compatibles avec la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Cette partie est indépendante de la partie I. Ces relations d'ordre permettront, dans la partie III, d'extraire d'un système de racines une

base de \mathbb{R}^n . Même si le fait d'avoir traité la partie I permet de mieux aborder celle-ci, le seul résultat utile est rappelé en début de la partie III et pourra être admis. Seule la dernière question dépend de la partie I. La partie IV est consacrée à l'étude d'un groupe engendré par les symétries associées à un système de racines. On montrera que les symétries associées à une base suffisent à engendrer le groupe. Pour cela, on utilisera des résultats établis dans la partie III. Ensuite, dans la partie V, on étudiera les groupes diédraux et on montrera qu'ils sont engendrés par deux éléments d'ordre 2. Cette partie est indépendante de ce qui précède (sauf pour traiter la dernière question). Dans la partie VI, on associe à un système de racines un ensemble de parties connexes de \mathbb{R}^n sur lequel agit le groupe défini dans la partie IV. On montre ensuite, par des arguments de dualité et de topologie, que toutes les bases extraites du système de racines sont en bijection avec ces connexes. Cette partie se finit en montrant que le groupe agit simplement transitivement sur l'ensemble de ces connexes et sur l'ensemble des bases du système de racines.

Partie I. SYSTÈMES DE RACINES DANS \mathbb{R}^2

Dans cette partie, on supposera $n = 2$. Soit R un système de racines de \mathbb{R}^2 . Pour $\alpha, \beta \in R$, on note $\theta_{\alpha, \beta}$ l'angle géométrique entre α et β , i.e. le nombre réel compris entre 0 et π défini par

$$\cos(\theta_{\alpha, \beta}) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

1. Soit $\alpha, \beta \in R$.

a) Montrer que $n_{\alpha, \beta} n_{\beta, \alpha} = 4 \cos^2(\theta_{\alpha, \beta})$.

b) En déduire les valeurs possibles de $\theta_{\alpha, \beta}$.

c) Montrer que le couple $(n_{\alpha, \beta}, n_{\beta, \alpha})$ ne peut pas prendre les valeurs $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(-1, -4)$ et $(-4, -1)$.

d) Pour $\theta_{\alpha, \beta} \neq \frac{\pi}{2}$, montrer que $\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{n_{\beta, \alpha}}{n_{\alpha, \beta}}$ et déduire les valeurs possibles du rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$

e) En supposant $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, présenter sous forme d'un tableau, les différentes valeurs de $n_{\alpha, \beta}$, $n_{\beta, \alpha}$, $\theta_{\alpha, \beta}$ et $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$.

2. Dessiner les figures correspondant à quatre systèmes de racines dans \mathbb{R}^2 non deux à deux isomorphes (dans chacun des cas, l'une des racines devra être $(1, 0)$). On les ordonnera dans l'ordre croissant du nombre de racines et on les appellera $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 et G_2 (ayant respectivement 4, 6, 8 et 12 racines).

3. Soit α une racine de R de norme minimale. Supposons qu'il existe une racine β de R non proportionnelle et non orthogonale à α . Quitte à transformer R par une rotation, une homothétie ou une symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R} \times \{0\}$ (qui laissent invariants les coefficients de structure du système de racines), on peut supposer $\alpha = (1, 0)$ et β de deuxième coordonnée strictement positive.

a) Montrer que $n_{\alpha, \beta} \neq 0$. En posant $\gamma = s_\alpha(\beta)$, montrer que $n_{\alpha, \gamma} = -n_{\alpha, \beta}$.

Quitte à remplacer β par $s_\alpha(\beta)$, on supposera $n_{\alpha, \beta} < 0$ et d'après le tableau des valeurs de $\theta_{\alpha, \beta}$, trois cas peuvent se présenter.

b) **cas 1** : Supposons que $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha, \beta} = \frac{3\pi}{4}$. Calculer $s_\alpha(\beta)$ et $s_\beta(\alpha)$ et représenter graphiquement les quatre racines α , β , $s_\alpha(\beta)$ et $s_\beta(\alpha)$. En déduire que $B_2 \subset R$. En supposant qu'il existe $\gamma \in R \setminus B_2$, montrer qu'alors l'angle entre γ et une racine de B_2 est inférieur à $\frac{\pi}{8}$. En conclure que $R = B_2$.

c) **cas 2** : Supposons que $\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha, \beta} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer

$$s_\alpha(\beta), \quad s_\beta(\alpha), \quad s_\beta \circ s_\alpha(\beta) \quad \text{et} \quad s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)$$

et les représenter graphiquement ainsi que α et β . En déduire que $G_2 \subset R$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $R = G_2$.

d) **cas 3** : Supposons que $\|\beta\| = \|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha, \beta} = \frac{2\pi}{3}$. Calculer $s_\alpha(\beta)$ et en déduire que $A_2 \subset R$. Supposons que $R \neq A_2$, soit $\gamma \in R \setminus A_2$. Montrer que l'angle entre γ et deux vecteurs adjacents de A_2 est égal à $\frac{\pi}{6}$. Quitte à réindexer les éléments de A_2 , montrer qu'on peut supposer $\theta_{\alpha, \gamma} = \frac{5\pi}{6}$. En déduire que $R = G_2$.

4. En conclure qu'à isomorphisme près, il n'y a que quatre systèmes de racines dans \mathbb{R}^2 .

Partie II. RELATIONS D'ORDRE DANS \mathbb{R}^n

Une relation d'ordre \preceq sur \mathbb{R}^n est dite compatible avec la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, x \preceq y \implies x + z \preceq y + z$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, x \preceq y \implies \lambda x \preceq \lambda y$.

La relation d'ordre strict associée est notée \prec .

1. Soit \preceq une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel.

a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^-, \quad x \preceq y \implies \lambda y \preceq \lambda x$$

b) Soit $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$ (le groupe linéaire de \mathbb{R}^n). On définit une relation par : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $x \preceq' y$ si $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$. Montrer que \preceq' est une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel.

2. On définit une relation \preceq sur \mathbb{R}^n par : pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $x \preceq y$ si

$$x = y \quad \text{ou} \quad [x \neq y \text{ et } x_k < y_k \text{ avec } k = \min\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}]$$

a) En munissant le plan \mathcal{P} d'un repère (O, \vec{u}, \vec{v}) , représenter graphiquement la partie

$$\{M(x, y) \in \mathcal{P}; (0, 0) \preceq (x, y)\}$$

en la hachurant d'une couleur particulière.

b) Montrer que la relation \preceq est une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel. Cet ordre est appelé **l'ordre lexicographique**.

Partie III. BASE D'UN SYSTÈME DE RACINES

On supposera n quelconque. Soit R un système de racines de \mathbb{R}^n . Les résultats obtenus en I.1.e restent vrais, même si la dimension n'est plus 2. En particulier, pour deux racines $\alpha, \beta \in R$ distinctes, si $n_{\alpha, \beta} > 0$, l'un des deux coefficients $n_{\alpha, \beta}$ ou $n_{\beta, \alpha}$ est égal à 1.

On appelle **base du système de racines** R une partie B de R telle que

- la famille B est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ,
- tout élément de R est combinaison linéaire d'éléments de B , à coefficients entiers, soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls.

L'objet de cette partie est de mettre en évidence de telles bases.

1. On munit \mathbb{R}^n d'une relation d'ordre total \prec compatible avec la structure d'espace vectoriel. On note alors R^+ l'ensemble des racines positives et R^- l'ensemble des racines négatives, c'est à dire :

$$R^+ = \{\alpha \in R, 0 \prec \alpha\} \quad \text{et} \quad R^- = \{\alpha \in R, \alpha \prec 0\}$$

On appelle **racine simple** une racine positive qui n'est pas somme de deux racines positives et on note B l'ensemble des racines simples.

- a) Montrer que tout élément de R^+ est soit dans B , soit somme de deux racines positives strictement plus petites.
- b) Montrer que tout élément de R^+ est combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls. (*Indication : On pourra ordonner les éléments de R^+ et faire une démonstration par récurrence ou raisonner par l'absurde.*)
2. Soit deux racines distinctes $\alpha, \beta \in R$.
- a) Montrer que si $n_{\alpha, \beta} > 0$, alors $\alpha - \beta \in R$.
- b) Supposons que $\alpha, \beta \in B$. Montrer que $\alpha - \beta \notin R$ et $n_{\alpha, \beta} \leq 0$.
3. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s \in B$ des racines simples deux à deux distinctes et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ des réels positifs tels que

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = \lambda_{r+1} \alpha_{r+1} + \dots + \lambda_s \alpha_s$$

Montrer que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ sont tous nuls. (*Indication : On pourra poser $v = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r$ et montrer que $\langle v, v \rangle \leq 0$.*)

4. Montrer que B est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . (On dit que B est une base du système de racines R , associée à l'ordre sur \mathbb{R}^n).
5. En munissant \mathbb{R}^2 de l'ordre lexicographique, pour chacun des quatre systèmes de racines, dessiner d'une couleur particulière les vecteurs de la base associée.

Partie IV. GROUPE DE WEYL D'UN SYSTÈME DE RACINES

Soit R un système de racines de \mathbb{R}^n , \preceq une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel, R^+ l'ensemble des racines positives et B la base de R associée à la relation d'ordre. On appelle **groupe de Weyl** de R , noté W , le sous-groupe des automorphismes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , engendré par les symétries s_α ($\alpha \in R$).

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$ (le groupe orthogonal de \mathbb{R}^n). Établir que

$$s_{\varphi(a)} = \varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}$$

2. Montrer que le groupe de Weyl W est un groupe fini.

3. a) Soit $\alpha \in R^+ \setminus B$. Montrer qu'il existe $\beta \in B$ tel que $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$ (Ind : on pourra utiliser III.1.b et développer $\langle \alpha, \alpha \rangle$). En déduire que $n_{\beta, \alpha} > 0$ et que $\alpha - \beta \in R^+$.
 b) Soit $\alpha \in R^+$ et $\beta \in B$ tels que $\alpha \neq \beta$. Montrer que $s_\beta(\alpha) \in R^+$.
4. On note W_B le sous-groupe de W engendré par les applications $(s_\alpha)_{\alpha \in B}$ et on pose

$$S = \{w(\alpha); w \in W_B \text{ et } \alpha \in B\}$$

- a) Montrer que $R^+ \subset S$. (Ind : On pourra raisonner par l'absurde).
 b) En déduire que $R = S$. (Ind : On pourra remarquer que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ pour $\alpha \in B$).
 c) Conclure que $W = W_B$.

Partie V. GROUPES DIÉDRAUX

1. Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p} , le groupe des isométries laissant invariant un polygône régulier

$$\mathcal{P}_p = \{M_0, \dots, M_{p-1}\}$$

à p sommets, parcourus dans le sens direct. On posera $M_p = M_0$.

- a) Montrer que le sous-groupe C_p de D_{2p} constitué des isométries directes, est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{p}$ où O est le centre du polygône \mathcal{P}_p .
 b) Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygône \mathcal{P}_p invariant.
 c) Montrer que

$$D_{2p} = \{\rho^i \circ \sigma^j; i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\}$$

et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.

- d) Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.
2. Soit G un groupe fini engendré par deux éléments distincts s et s' d'ordre 2. On pose $r = ss'$ et on note p l'ordre de r . On note e l'élément neutre de G .
- a) Montrer que G est engendré par r et s .
 b) Établir que $sr = r^{-1}s$, puis que $sr^k = r^{p-k}s$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$G = \{r^i s^j; i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\}$$

- c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s \neq r^k$ (on pourra raisonner par l'absurde et montrer que G serait commutatif, puis que $G = \{e, r\}$). En déduire que G est d'ordre $2p$.
- d) Montrer que G est isomorphe à D_{2p} .
- e) Déterminer les groupes de Weyl associés aux systèmes de racines de \mathbb{R}^2 .

Partie VI. CHAMBRES DE WEYL

Soit R un système de racines de \mathbb{R}^n et W le groupe de Weyl associé. Pour tout $\alpha \in R$, on note P_α l'hyperplan orthogonal à α .

1. Montrer que $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^n .

La partie Ω est réunion finie disjointe de parties non vides ouvertes connexes de \mathbb{R}^n , ce sont les **chambres de Weyl** du système de racines R .

2. Soit C une partie connexe non vide de \mathbb{R}^n incluse dans Ω . Montrer qu'il existe une chambre de Weyl de R contenant C .
3. Montrer que le groupe de Weyl W permute les hyperplans P_α ($\alpha \in R$), ainsi que les chambres de Weyl.
4. Soit C_1 et C_2 deux chambres de Weyl de R et soit $x_1 \in C_1$ et $x_2 \in C_2$.
- a) Justifier l'existence d'un élément $w \in W$ tel que

$$\|x_1 - w(x_2)\| = \inf\{\|x_1 - w'(x_2)\|; w' \in W\}$$

b) On pose $I = \{tx_1 + (1-t)w(x_2); t \in [0, 1]\}$. Montrer que $I \subset C_1$. (Indication : On pourra supposer qu'il existe $\alpha \in R$ tel que $I \cap P_\alpha \neq \emptyset$ et montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\langle t_0x_1 + (1-t_0)w(x_2), \alpha \rangle = 0$ et que $\|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 < \|x_1 - w(x_2)\|^2$).

c) En déduire que $w(C_2) = C_1$. On dit que le groupe W **opère transitivement** sur les chambres de Weyl de R .

5. Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R et soit $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ la base duale de B pour le produit scalaire de \mathbb{R}^n , c'est à dire, une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \langle \beta_i, \beta'_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose

$$C(B) = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, \beta_1 \rangle > 0, \dots, \langle x, \beta_n \rangle > 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \beta'_i; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$$

égalité que l'on ne demandera pas de démontrer.

a) Montrer que $C(B) \subset \Omega$ et qu'il existe une chambre de Weyl C telle que $C(B) \subset C$.

b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé. On pose

$$C_i^+ = \{x \in C; \langle x, \beta_i \rangle > 0\} \quad \text{et} \quad C_i^- = \{x \in C; \langle x, \beta_i \rangle < 0\}$$

Montrer que C_i^+ et C_i^- sont des parties ouvertes telles que $C_i^+ \cup C_i^- = C$ et $C_i^+ \cap C_i^- = \emptyset$. En déduire que $C = C_i^+$.

c) En déduire que $C(B) = C$. On dit que $C(B)$ est la **chambre de Weyl fondamentale** relativement à B .

6. Pour chacun des quatre systèmes de racines de \mathbb{R}^2 , hachurer d'une couleur particulière la chambre de Weyl fondamentale relativement à la base associée à l'ordre lexicographique de \mathbb{R}^2 .

7. a) Montrer que pour toute chambre de Weyl C de R , il existe une base B de R telle que $C = C(B)$.

b) Montrer que l'application qui à une base B de R associe la chambre $C(B)$ est une bijection de l'ensemble des bases de R sur l'ensemble des chambres de R .

8. Soit B une base de R , R^+ l'ensemble des racines positives et R^- l'ensemble des racines négatives.

a) Soit β_1, \dots, β_p ($p \in \mathbb{N}^*$) des éléments non nécessairement distincts de B tels que

$$s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) \in R^-$$

Montrer qu'il existe $q \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que

$$s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}.$$

b) En déduire que si $w \in W$ et $w \neq id$, alors il existe $\beta \in B$ tel que $w(\beta) \in R^-$.

9. a) Montrer que le groupe de Weyl W de R **opère simplement transitivement** sur l'ensemble des bases de R , c'est à dire que pour deux bases B et B' données de R , il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(B) = B'$.

b) En déduire que le groupe de Weyl W de R opère simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de R .