LEÇON N° 36 :

Produit vectoriel, produit mixte.

Pré-requis :
- *Généralités sur les espaces euclidiens affines et vectoriels de dimension inférieure ou égale à trois ;*
- *Orientation de l'espace (base orthonormée directe, indirecte) : règle des trois doigts de la main droite ;*
- *Angle orienté de deux vecteurs non nuls dans le plan euclidien, cosinus, sinus (dans un triangle rectange) ;*
- *Notions sur les surfaces, solides usuels, produit scalaire.*

36.1 Produit mixte

Définition 1 : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. On appelle *produit mixte* de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le réel $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ défini par :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det{}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

`Remarque 1` : Le calcul du déterminant est indépendant du choix de la base orthonormée directe.

Proposition 1 : L'application $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est une forme trilinéaire alternée qui vaut 1 pour les bases orthonormées directes et 0 lorsque $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

démonstration : *Le produit mixte est bien une forme trilinéaire alternée car le déterminant de trois vecteurs l'est. Puisque le déterminant d'une matrice orthogonale directe vaut 1, le produit mixte vaut également 1 pour les trois vecteurs d'une base orthonormée directe (et donc -1 pour les vecteurs d'une base orthonormée indirecte). Enfin, on a*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont liés.}$$

Mais comme on est dans un espace de dimension 3, il vient que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires. ■

Théorème 1 : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors il existe un unique vecteur $\vec{p}$ de l'espace tel que pour tout vecteur $\vec{w}$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{p} \cdot \vec{w}$.

démonstration : *Donnons-nous une base orthonormée directe de l'espace $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et notons $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(x', y', z'), \vec{w}(x'', y'', z'')$ dans cette base $\mathscr{B}$. On a alors :*

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &\overset{\text{déf.}}{=} \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \left| \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \right| \\ &= x''(yz' - zy') - y''(xz' - zx') + z''(xy' - yx') \\ &= x''(yz' - zy') + y''(x'z - z'x) + z''(xy' - yx'). \end{aligned}$$

Posons alors $\vec{p}(yz' - zy', x'z - z'x, xy' - yx')$. L'égalité précédente s'écrit $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{p} \cdot \vec{w}$.

Montrons encore l'unicité en supposant qu'il existe un autre vecteur $\vec{q}$ de l'espace tel que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{q}\cdot\vec{w} = \vec{p}\cdot\vec{w}$. La linéarité du produit scalaire nous assure alors que $(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{w} = 0$ pour tout vecteur $\vec{w}$. Nécessairement, $\vec{p}-\vec{q} = \vec{0}$, d'où $\vec{p} = \vec{q}$. ■

36.2 Produit vectoriel

36.2.1 Définition analytique, induite du produit mixte

Définition 2 : Le vecteur $\vec{p}$ défini ci-dessus s'appelle le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, de sorte que pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de l'espace :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}\wedge\vec{v}\ (yz'-zy', x'z-z'x, xy'-yx').$$

Remarque 2 : Par alternance du produit mixte et symétrie du produit scalaire, on a :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] \overset{\text{déf.}}{=} (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}).$$

36.2.2 Propriétés immédiates

Proposition 2 (orthogonalité) : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

démonstration *: En effet, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u} = [\vec{u},\vec{v},\vec{u}] = 0$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{v} = [\vec{u},\vec{v},\vec{v}] = 0$ car deux colonnes du déterminant sont les mêmes.* ■

Proposition 3 (colinéarité) : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

démonstration *:*

"$\Longrightarrow$" : *Il existe $k\in\mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, et le déterminant $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ est donc nul pour tout vecteur $\vec{w}$, impliquant $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.*

"$\Longleftarrow$" : *Supposons $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$. Alors pour tout $\vec{w}$,*

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \overset{\text{prop 1}}{\Rightarrow} \vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ coplanaires.}$$

Supposons alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, donc non liés. Il vient alors que $\vec{w}$ se trouve dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui est absurde puisque $\vec{w}$ est quelconque dans l'espace. On en déduit donc que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

■

Proposition 4 (base orthonormée) : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

démonstration : *D'après la proposition 2, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit alors $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe. Alors*

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) > 0,$$

prouvant que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}))$ forme bien une base directe. ■

`Remarque 3` : Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base orthonormée directe de l'espace, alors on a :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

Proposition 5 (antisymétrie) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

démonstration : *Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace, on a :*

$$(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \overset{prop\ 1}{=} -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad \overset{thm\ 1}{\Rightarrow} \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

■

`Remarques 4` :

◇ Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base orthonormée directe de l'espace, alors on a :

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \text{et} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

◇ Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Par contraposée de la proposition 3, $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$. Or $(\vec{u} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. En supposant alors que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$, on aurait que $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont colinéaires par la proposition 3, ce qui contredit le résultat de la proposition 2 ($\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$. On en déduit alors que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) \neq \vec{0}$, donc

$$(\vec{u} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} \neq \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) :$$

le produit vectoriel n'est pas associatif !

◇ Les propositions 1 et 4 vont nous prouver que **le produit scalaire est bilinéaire**.

démonstration : *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs quelconques, et $a, b \in \mathbb{R}$.*

Par rapport à la première variable : *Alors pour tout vecteur $\vec{z}$ de l'espace,*

$$\big((a\vec{u} + b\vec{v}) \wedge \vec{w}\big) \cdot \vec{z} \overset{déf.\ 2}{=} [a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] \overset{prop\ 1}{=} a[\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}] + b[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] \overset{déf.\ 2}{=} \big(a(\vec{u} \wedge \vec{w}) + b(\vec{v} \wedge \vec{w})\big) \cdot \vec{z}.$$

C'est le théorème 1 qui permet de conclure que $(a\vec{u} + b\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{u} \wedge \vec{w}) + b(\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Par rapport à la seconde variable : *Alors pour tout vecteur $\vec{z}$ de l'espace, et d'après ce qui précède,*

$$\big(\vec{u} \wedge (a\vec{v} + b\vec{w})\big) \cdot \vec{z} \overset{prop\ 5}{=} -\big((a\vec{v} + b\vec{w}) \wedge \vec{u}\big) \cdot \vec{z} = -\big(a(\vec{v} \wedge \vec{u}) + b(\vec{w} \wedge \vec{u})\big) \cdot \vec{z} \overset{prop\ 5}{=} \big(a(\vec{u} \wedge \vec{v}) + b(\vec{u} \wedge \vec{w})\big) \cdot \vec{z}.$$

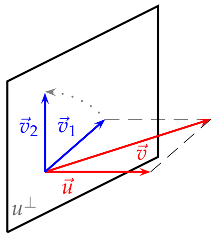
Le théorème 1 permet encore de conclure que $\vec{u} \wedge (a\vec{v} + b\vec{w}) = a(\vec{u} \wedge \vec{v}) + b(\vec{u} \wedge \vec{w})$. ■

`Remarque 5` : Avec la définition 2, on aurait pu montrer la bilinéarité du produit vectoriel en montrant que les coordonnées des deux vecteurs de chaque égalité sont les mêmes, mais ce travail est trop lourd en terme de lignes de calcul. Une autre possibilité élégante est de montrer que l'application $f_{\vec{u}} : \vec{v} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ (avec $\vec{u}$ un vecteur arbitrairement fixé) est linéaire :

démonstration *: Montrons que $f_{\vec{u}}$ est la composition*

$$f_{\vec{u}} = h_{\|\vec{u}\|} \circ r_{(\vec{u},\pi/2)} \circ p_{\vec{u}^{\perp}}$$

de trois applications linéaires, respectivement une homothétie, une rotation et une projection orthogonale.



Pour obtenir le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on commence par construire un vecteur $\vec{v}_2$ de la droite $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^{\perp}$ tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}_2)$ soit directe : pour cela, il suffit de projeter orthogonalement $\vec{v}$ sur $\vec{u}^{\perp}$, nous donnant ainsi un vecteur $\vec{v}_1$ orthogonal à $\vec{u}$, puis de faire subir à ce vecteur une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{u}$, nous donnant alors le vecteur $\vec{v}_2$ avec les propriétés recherchées (figure ci-contre).

Il reste à dilater $\vec{v}_2$ pour le transformer en un vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de longueur convenable. Mais on a

$$\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|.$$

Il suffit donc de dilater $\vec{v}_2$ en le multipliant par $\|\vec{u}\|$. L'application $f_{\vec{u}}$ est donc bien linéaire. Il suffit alors d'inverser les rôles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour montrer qu'elle est en fait bilinéaire. ■

36.2.3 Formule du double produit vectoriel

Théorème 2 : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

démonstration *: La formule est évidente si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$. Supposons alors ces deux vecteurs non nuls. Le cas où ils seraient colinéaires est évident aussi (il suffit d'écrire par exemple $\vec{w} = k\vec{v}$ pour $k \in \mathbb{R}^*$).*

Supposons alors enfin que ces deux vecteurs ne soient pas colinéaires. Posons $\vec{i} = \vec{v} / \|\vec{v}\|$, puis posons $\vec{j}$ dans le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tel qu'il soit unitaire et orthogonal à $\vec{i}$. Posons enfin $\vec{k}$ de sorte que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe de l'espace, notée $\mathscr{B}$. Dans cette base, les coordonnées de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans $\mathscr{B}$ sont respectivement $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Il existe donc six réels $x_u, y_u, z_u, x_v, x_w, y_w$ non nuls tels que

$$\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = x_v\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{w} = x_w\vec{i} + y_w\vec{j}.$$

On détermine alors que

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} &= (x_u x_w + y_u y_w)\vec{v} - (x_u x_v)\vec{w} \\
&= (x_u x_w + y_u y_w)(x_v\vec{i}) - (x_u x_v)(x_w\vec{i} + y_w\vec{j}) \\
&= x_u x_v x_w \vec{i} + y_u x_v y_w \vec{i} - x_u x_v x_w \vec{i} - x_u x_v y_w \vec{j} = -x_u x_v y_w \vec{j} + y_u x_v y_w \vec{i}.
\end{aligned}$$

Par bilinéarité du produit vectoriel, on a aussi :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (x_v\vec{i}) \wedge (x_w\vec{i} + y_w\vec{j}) = \underbrace{(x_v\vec{i}) \wedge (x_w\vec{i})}_{=\vec{0}} + (x_v\vec{i}) \wedge (y_w\vec{j}) = x_v\, y_w(\vec{i} \wedge \vec{j}) = x_v\, y_w\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}) \wedge (x_v\, y_w\vec{k}) = x_u x_v y_w(\vec{i} \wedge \vec{k}) + y_u x_v y_w(\vec{j} \wedge \vec{k}) \\
&= -x_u x_v y_w \vec{j} + y_u x_v y_w \vec{i}.
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée. ■

36.2.4 Définition géométrique

Théorème 3 (identité de Lagrange) : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

démonstration : *On a :*

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v}] = -\big(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\big) \cdot \vec{v} \\
&\overset{thm\ 2}{=} -\big((\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v}\big) \cdot \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1 : En notant θ l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (donc compris entre 0 et π), on a :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin\theta.$$

démonstration *: Par projection du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ et par l'identité de Lagrange, on a :*

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \big(\|\vec{v}\| \cos\theta \ \|\vec{u}\|\big)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \ (1 - \cos^2\theta) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

On en déduit ($\theta \in [0, \pi]$ est un angle géométrique, donc $\sin\theta \geqslant 0$) l'égalité recherchée. ■

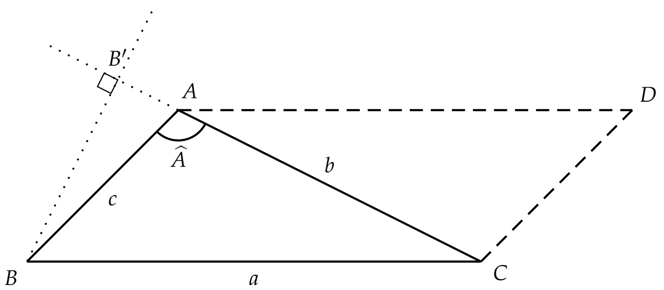
`Remarque 7` : Pour parler vraiment de "définition", il faudrait encore montrer que si le produit vectoriel était défini par $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \sin\theta$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ serait l'unique vecteur à vérifier $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ pour tout autre vecteur $\vec{w}$ de l'espace, c'est-à-dire que les deux définitions sont équivalentes.

36.3 Applications

36.3.1 Aire du triangle et du parallélogramme

Exercice : Soit $ABDC$ un parallélogramme non aplati. On note $\hat{A}$ l'angle au sommet A dans le triangle ABC, et a, b, c les mesures respectives des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$. Calculer l'aire du triangle ABC et du parallélogramme $ABCD$.

Faisons au préalable une figure illustrant ce que nous allons faire :



En utilisant les propriétés de la fonction sinus, on trouve que $\sin\widehat{A} = \sin(\pi - \widehat{A}) = \dfrac{BB'}{c} \Leftrightarrow BB' = c\sin\widehat{A}$. On en déduit que

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\, b\, BB' = \frac{1}{2}\, bc \sin\widehat{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\, \sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|,$$

ainsi que

$$\mathscr{A}_{ABCD} = 2\mathscr{A}_{ABC} = \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|.$$

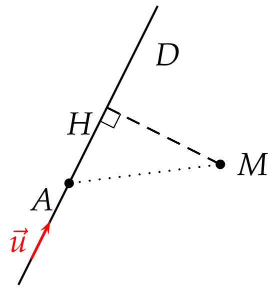
◇

36.3.2 Distances

- d'un point à une droite de l'espace

Soit D une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
La distance d'un point M à la droite D est donnée par

$$d(M,D) = \frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$



démonstration *: Si H désigne le projeté orthognal de M sur D, alors $d(M,D) = MH$. Or*

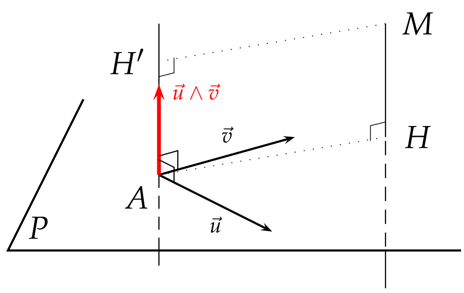
$$\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\| = \|(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}\| = MH\,\|\vec{u}\|,$$

d'où le résultat attendu, par division des deux membres par $\|\vec{u}\|$, non nul par hypothèse. ■

- d'un point à un plan de l'espace

Soit P un plan de l'espace euclidien orienté passant par un point A et dirigé par $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$. La distance d'un point M au plan P est donnée par

$$d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$



démonstration *: On appelle H le projeté orthogonal de M sur le plan P, et H′ sont projeté orthogonal sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\wedge\vec{v}$. De manière simpliste, on a dans le triangle MAH′ que*

$$\cos\widehat{A} = \frac{AH'}{MA} \quad\Leftrightarrow\quad AH' = MA\ \cos\widehat{A}.$$

Cela se traduit donc par :

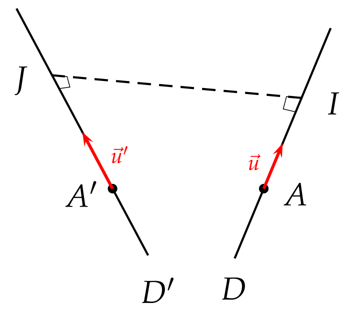
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MH} &= \overrightarrow{H'A} = \|\overrightarrow{MA}\|\cos(\overrightarrow{AM},\vec{u}\wedge\vec{v})\ \frac{-\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{MA}\|\ \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\ \cos(\overrightarrow{MA},\vec{u}\wedge\vec{v})}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}\ \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}\ \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.
\end{aligned}$$

D'où $MH = \|\overrightarrow{MH}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$. ■

- entre deux droites non coplanaires

Soient D et D' deux droites non coplanaires de l'espace passant respectivement par A et A' et ayant respectivement pour vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$. Alors

$$\begin{aligned} d(D, D') &= \min\{d(M, N) \mid M \in D, N \in D'\} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}\,')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}\,'\|}. \end{aligned}$$



démonstration : *Commençons par dire que cette distance existe puisqu'un théorème (dont on ne donnera pas de démonstration ici) nous assure qu'il existe une unique droite à la fois sécante et perpendiculaire aux droites D et D′ dans l'espace. On note respectivement I et J les points d'intersection de cette droite avec D et D′.*

Soient $M \in D$ et $N \in D'$. Alors d'après le théorème de Pythagore (puisque $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JN}$, donc aussi au vecteur $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}$),

$$MN^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}\|^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}\|^2 + \|\overrightarrow{IJ}\|^2.$$

Donc $M = I$ et $N = J$ réalisent le minimum de MN. De plus, si p désigne la projection orthogonale vectorielle sur la droite $\overrightarrow{\Delta} = (\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{D'})^{\perp}$, alors on aura

$$\overrightarrow{IJ} = p(\overrightarrow{AA'}) = \frac{\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}\,')}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}\,'\|} \, \frac{\vec{u} \wedge \vec{u}\,'}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}\,'\|},$$

d'où le résultat. ■