# LEÇON N° 20 :

# Exemples d'utilisation des nombres complexes.

**Pré-requis** :
- *Construction des complexes ;*
- *Formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe, en particulier :*

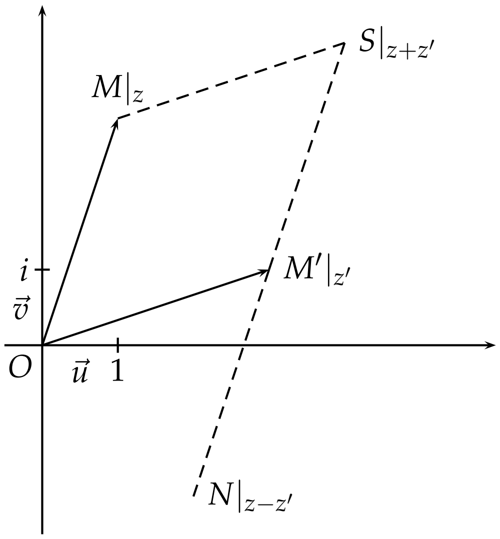
$$r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \ ; \end{cases}$$

- *Groupe cyclique, similitude directe et son écriture complexe.*
- (*Théorème de Liouville*).

## 20.1 Les nombres complexes

### 20.1.1 Représentation géométrique et définitions

Soit $\mathscr{P}$ le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.




**Définition 1 :**
- ◇ $M = (x, y)$ est appelé *image* du nombre complexe $m = x + iy$. On le note $M|_m$ ou $M(m)$. Réciproquement, $m$ est appelé *affixe* du point $M$.
- ◇ Pour tous $M|_z$ et $M'|_{z'}$, le point $N|_{z-z'}$ est tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{ON}$. On dit que $z - z'$ (l'affixe de N) est aussi l'*affixe* de $\overrightarrow{MM'}$. $z$ est donc également l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.

`Remarque 1` : L'addition dans $\mathbb{C}$ s'interprète comme l'addition vectorielle.

### 20.1.2 Définitions et propriétés

On se donne un nombre complexe $z = a + ib$.

**Définition 2 :**
- $a$ est la *partie réelle* de $z$, notée $\Re e(z)$. $b$ est la *partie imaginaire* de $z$, notée $\Im m(z)$ ;
- Le nombre complexe $a - ib$ est appelé *conjugué* de $z$, noté $\overline{z}$ (donc en particulier, $\overline{\overline{z}} = z$) ;
- Le réel positif $\sqrt{z\,\overline{z}}$ est appelé *module* de $z$, noté $|z|$.

Remarques 2 :

1. $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \geqslant 0$, donc $|z|$ est bien défini. Notons que le module coïncide avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.
2. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$
est un morphisme de corps, d'où
$$\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'} \quad ; \quad \overline{-z} = -\overline{z} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \quad ; \quad z \neq 0 \Rightarrow \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}.$$
3. Géométriquement, l'application $z \longmapsto \overline{z}$ est la réflexion par rapport à l'axe réel $(O,\vec{u})$.

**Lemme** : Si $Z = a+ib \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions opposées dans $\mathbb{C}$.

***démonstration*** : *Cherchons s'il existe $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$. On a les équivalences :*

$$\begin{aligned}
\left((x+iy)^2 = a+ib\right) &\overset{prop\ 2(i)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\[2ex] y = \pm\text{signe}(b)\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \end{cases}
\end{aligned}$$

*avec* $\text{signe}(b) = \begin{cases} 1 & si & b>0 \\ 0 & si & b=0 \\ -1 & si & b<0 \end{cases}$. *Le résultat s'en déduit alors.* ∎

**Théorème 1 : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2-4ac \in \mathbb{C}$. Alors l'équation**

$$(E) : az^2+bz+c = 0$$

**admet deux solutions dans $\mathbb{C}$, données par :**

**(i) Si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2 = \dfrac{b}{2a}$ ;**

**(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors**
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$
**où $\delta$ est tel que $\delta^2 = \Delta$.**

*démonstration :*

$$(E) \Leftrightarrow a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right).$$

*Si $\Delta=0$, alors $\delta=0$ et $z_1=z_2=\frac{b}{2a}$. Sinon, le lemme assure que $\delta$ tel que $\delta^2=\Delta$ existe, et dès lors, on a :*

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

■

**Théorème 2 (fondamental de l'algèbre, ou de d'Alembert) : Toute fonction polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$ admet $n$ racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leurs multiplicités).**

*démonstration :* *On rappelle le théorème de Liouville et le vocabulaire qui va avec :*

Théorème de Liouville : Toute fonction $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ analytique et bornée est constante.
Analytique : $\forall\, z_0\in\mathbb{C}, f(z)=\sum a_k(z-z_0)^k$.
Bornée : $\exists\, M>0 \mid |f(z)|<M\ (\forall\, z)$.

*Montrons que tout polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$ admet au moins une racine. Supposons pour cela que $P$ n'admette aucun racines et considérons la fonction $f=1/P$. $f$ est analytique et clairement bornée car $|f(z)|=\frac{1}{|P(z)|}\xrightarrow[|z|\to\infty]{}0 \Rightarrow f$ est constante. On note alors $f(z)=C$, ce qui implique $P\equiv\frac{1}{C}\longrightarrow$ absurde, car $\deg(P)\geqslant 1$. D'où $P$ admet au moins une racine $z_0$. Par suite, il existe un polynôme $Q$ de degré $n-1$ tel que $P(z)=(z-z_0)\,Q(z)$, et on réitère ce raisonnement au polynôme $Q$ vérifiant $\deg(Q)=\deg(P)-1$. Au final, $P$ admet $n$ racines (avec éventuellement égalités de plusieurs d'entre elles).* ■

Dans toute la suite, et sauf mention contraire, $n$ désigne un entier naturel non nul, et $Z$ un nombre complexe non nul s'écrivant sous forme exponentielle $Z=R\,e^{i\theta}$. Un nombre complexe $z$ quelconque sera toujours écrit $z=r\,e^{i\alpha}$ sous forme exponentielle.

## 20.2 Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe

### 20.2.1 Cas général

**Problème** : Pour $Z=R\,e^{i\theta}\in\mathbb{C}$ fixé, il s'agit de trouver $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=Z$, c'est-à-dire résoudre l'équation complexe $z^n=Z$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. On trouve alors :

$$z^n=Z\Leftrightarrow r^n\,e^{in\alpha}=R\,e^{i\theta}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} r^n=R\\ n\alpha\equiv\theta\ [2\pi]\end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} r=R^{\frac{1}{n}}\\ \alpha\equiv\dfrac{\theta}{n}\ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right]\end{array}\right.,$$

d'où les solutions suivantes :

$$\forall\, k\in\{0,\ldots,n-1\},\quad z_k:=R^{\frac{1}{n}}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

**Théorème 3 : Soit $Z = R\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. L'équation complexe $z^n = Z$ admet $n$ racines distinctes. Son ensemble solution est donné par**

$$S_n = \left\{ R^{\frac{1}{n}}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

***démonstration*** : *L'existence des racines est donnée par ce qui précède le théorème. L'unicité de chaque solution vient de l'égalité modulo $2\pi/n$ : en effet, avec les notations données, on a que pour tous $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $z_{k+n} = z_k$.* ■

**Définition 3 : Les nombres $z_k$ définis ci-dessus sont appelés *racines $n$-ièmes de $Z$*. On note leur ensemble $S_n$.**

**Exercice** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \sqrt{3} + i$.

<u>**Solution**</u> : Il suffit de remarquer que

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \text{et} \qquad \arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6},$$

d'où les trois solutions suivantes :

$$\forall\, k \in \{1, 2, 3\}, \qquad z_k = 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}.$$

◊

### 20.2.2 Racines $n$-ièmes de l'unité

**Définition 4 : On désigne l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité par**

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

`Remarque 3` : On a donc que tout complexe $z \in \mathbb{U}_n$ vérifie $z^n = 1$.

**Théorème 4 : Les racines $n$-ièmes d'un nombre complexe $Z$ sont exactement les produits de l'une d'entre elles avec les racines $n$-ièmes de l'unité. Autrement dit, si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z^n = Z$, alors**

$$S_n = \left\{ z\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

***démonstration*** : *Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = Z$. Alors pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $\left(z\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = z^n \underbrace{e^{i2k\pi}}_{=1} = Z$.* ■

**Théorème 5 : $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est le seul sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ d'ordre $n$. De plus, il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.**

***démonstration*** :
***Sous-groupe*** :
– *Si $k = 0$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$, donc $1 \in \mathbb{U}_n$.*

– *Soient* $z, z' \in \mathbb{U}_n$. *Alors*

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+k')\pi}{n}} \\ &= e^{i\frac{2k''\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n, \qquad \text{avec } \begin{cases} k'' \in \{0, \ldots, n-1\} \\ k + k' \equiv k'' \ [n]. \end{cases} \end{aligned}$$

– *Soit* $z \in \mathbb{U}_n$. *On remarque que si* $z' = e^{i\frac{-2k\pi}{n}}$, *alors* $z \cdot z' = 1$, *de sorte que* $z^{-1} = z' \in \mathbb{U}_n$.

***Unicité :*** *Soit* $G$ *un tel sous-groupe, c'est-à-dire un sous groupe multiplicatif de* $\mathbb{C}^*$ *d'ordre* $n$. *Si* $z \in G$, *alors* $z^n = 1$ *(car* $G$ *est justement d'ordre* $n$*), donc* $z \in \mathbb{U}_n$, *ou encore* $G \subset \mathbb{U}_n$. *Puisque* $G$ *et* $\mathbb{U}_n$ *ont le même cardinal, il vient que* $G = \mathbb{U}_n$.

***Isomorphie :*** *On considère l'application suivante :*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\mathbb{U}_n, \cdot) \\ \overline{k} &\longmapsto e^{i\frac{2k\pi}{n}}. \end{aligned}$$

*On détermine que*

$$f(\overline{0}) = e^{i\frac{2\cdot 0\pi}{n}} = 1 \qquad \text{et} \qquad f(\overline{k} + \overline{k'}) = e^{i\frac{2(k+k')\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = f(\overline{k}) \cdot f(\overline{k'}),$$

*de sorte que* $f$ *soit un morphisme de groupes. On montre de plus qu'il est injectif :*

$$f(\overline{k}) = f(\overline{k'}) \Leftrightarrow e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \ [2\pi] \Leftrightarrow k \equiv k' \ [n] \Leftrightarrow \overline{k} = \overline{k'}.$$

*Enfin, grâce au point précédent, on sait que* $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{U}_n|$, *donc* $f$ *est un isomorphisme.* ■

**Corollaire 1 : $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe cyclique.**

***démonstration :*** *Découle directement du fait que* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *l'est.* ■

**Proposition 1 : Les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont les $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $n$ sont premiers entre eux.**

***démonstration :*** $\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}}\right\} = \{1, \omega_1, \omega_1^2, \ldots, \omega_1^{n-1}\}$, *donc* $\omega_1$ *est un générateur de* $\mathbb{U}_n$. *Soit alors* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. *On a*

$$\begin{aligned} \omega_k \text{ est un générateur de } \mathbb{U}_n &\Leftrightarrow \exists\, k' \mid (\omega_k)^{k'} = \omega_1 \Leftrightarrow e^{i\frac{2kk'\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow kk' \equiv 1 \ [n] \Leftrightarrow \exists\, k', u \mid kk' + un = 1 \\ &\overset{\text{Bézout}}{\Leftrightarrow} k \wedge n = 1, \end{aligned}$$

*d'où le résultat.* ■

*Exemple avec* $\mathbb{U}_6$ :

– $5 \wedge 6 = 1$ et $\langle e^{i\frac{5\pi}{3}} \rangle = \{1, e^{i\frac{5\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{3\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\} = \mathbb{U}_6$ ;

– $2 \wedge 6 = 2$ et $\langle e^{i\frac{2\pi}{3}} \rangle = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\} \neq \mathbb{U}_6$ ;

**Définition 5 : Un générateur de $\mathbb{U}_n$ est appelé *racine primitive $n$-ième de l'unité*.**

## 20.3 Interprétation graphique

On se place dans un plan $\mathscr{P}$.

**Définition 6 : Soient $M_0, \ldots, M_{n-1} \in \mathscr{P}$. Ces points constituent les $n$ sommets d'un polygone régulier s'il existe un point $\Omega$ et une rotation de centre $\Omega$ et d'angle $2\pi/n$ envoyant $M_k$ sur $M_{k+1}$ (pour $k \in \{0, \ldots, n-2\}$) et $M_{n-1}$ sur $M_0$.**

**Proposition 2 : Soit $M \in \mathscr{P}$ le point d'affixe $Z$. Les racines $n$-ièmes de $Z$ se situent sur un même cercle de centre $O$ (origine du repère) et de rayon $R^{\frac{1}{N}}$. De plus, si**
**$n = 2$, elles sont diamétralement opposées ; $n \geqslant 3$, elles forment les sommets d'un polygone régulier.**

***démonstration :*** *Notons $M_k$ le point d'affixe $z_k = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Soit un tel $k$. Alors on vérifie que $OM_k = |z_k| = R^{\frac{1}{n}}$, de sorte que les racines $n$-ièmes de $Z$ soient effectivement situées sur un même cerlce de centre $O$ et de rayon $R^{\frac{1}{n}}$.*

*De plus, lorsque $n = 2$, le calcul nous permet d'affirmer que $\arg(z_0) = \theta/n$ et $\arg(z_1) = \theta/n + \pi$, donc les racines sont diamétralement opposées.*

*Enfin, lorsque $n \geqslant 3$, on vérifie que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, on ait*

$$z_k\, e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_{k+1} \qquad \text{et} \qquad z_{n-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_0,$$

*d'où le résultat attendu.* ■

**Proposition 3 : Les racines $n$-ièmes de $Z$ se déduisent de celles de l'unité par une similitude de centre $O$, de rapport $R^{\frac{1}{n}}$ et d'angle $\theta/n$.**

***démonstration :*** *On rappelle que $f : z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ est l'écriture complexe de la similitude de centre $O$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$. Soit alors $a = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \in \mathbb{C}^*$, qui est une racine $n$-ième de $Z$ ($k = 0$). D'après le théorème 2, les autres racines de $Z$ se déduisent de celle-ci par multiplication avec les racines $n$-ièmes de l'unité, notées précédemment $\omega_k$. On a donc*

$$S_n = \{a \cdot 1, a \cdot \omega_1, \ldots, a \cdot \omega_{n-1}\} = \{f(\omega_0), f(\omega_1), \ldots, f(\omega_{n-1})\},$$

*et chaque racine $n$-ième de $Z$ est donc bien l'image d'une racine $n$-ième de l'unité par la similitude annoncée.* ■

## 20.4 Applications

### 20.4.1 Factorisation

**Exercice** : Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par $P(z) = z^4 + 1$.

**Solution** : $z^4 = -1 = e^{i(-\pi)}$, donc pour $k = 0, \ldots, 3$, on a $z_k = e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})}$, ce qui donne

$$P(z) = (z - e^{-i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{i\frac{5\pi}{4}}).$$

$\diamond$

### 20.4.2 Somme et produit des racines $n$-ièmes de l'unité

$$\begin{aligned} z^n = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^n - 1 = 0 \overset{\text{thm } 3}{\Leftrightarrow} (z - \omega_0)(z - \omega_1) \cdots (z - \omega_{n-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^n - (\omega_0 + \cdots + \omega_{n-1})\, z^{n-1} + \cdots + (-1)^n\, \omega_0 \cdots \omega_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

La dernière ligne a été obtenue en développant, mais en n'étudiant que le coefficient de $z^{n-1}$ et $z^0$ : en particulier, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0 \qquad \text{et} \qquad (-1)^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = 1.$$

### 20.4.3 Caractérisation d'un triangle équilatéral

**Exercice** : Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{C}$. Montrer que $ABC$ est équilatéral si et seulement si $b + ja + j^2c = 0$ (ou $c + ja + j^2b = 0$).

**Solution** : On considère la rotation $\mathscr{R}$ de centre $A$ et d'angle $\pi/3$. Alors deux cas se présentent :
**Si $\mathscr{R}(C) = B$,** alors

$$\begin{aligned} & (b - a) = e^{i\frac{\pi}{3}}\,(c - a) \qquad (j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}) \\ \Leftrightarrow \quad & b - a + j^2c - j^2a = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & b + (-1 - j^2)a + j^2c = 0 \qquad (1 + j + j^2 = 0) \\ \Leftrightarrow \quad & b + ja + j^2c = 0. \end{aligned}$$

**Si $\mathscr{R}(B) = C$,** on procède de la même manière pour trouver l'autre égalité. $\diamond$

### 20.4.4 Pentagone régulier à la règle et au compas

**Exercice** : On pose $\rho = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{4} \rho^k = 0$ ;
2. Montrer que $\rho + \dfrac{1}{\rho}$ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$ ;
3. En déduire une expression de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ ;

4. En déduire une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

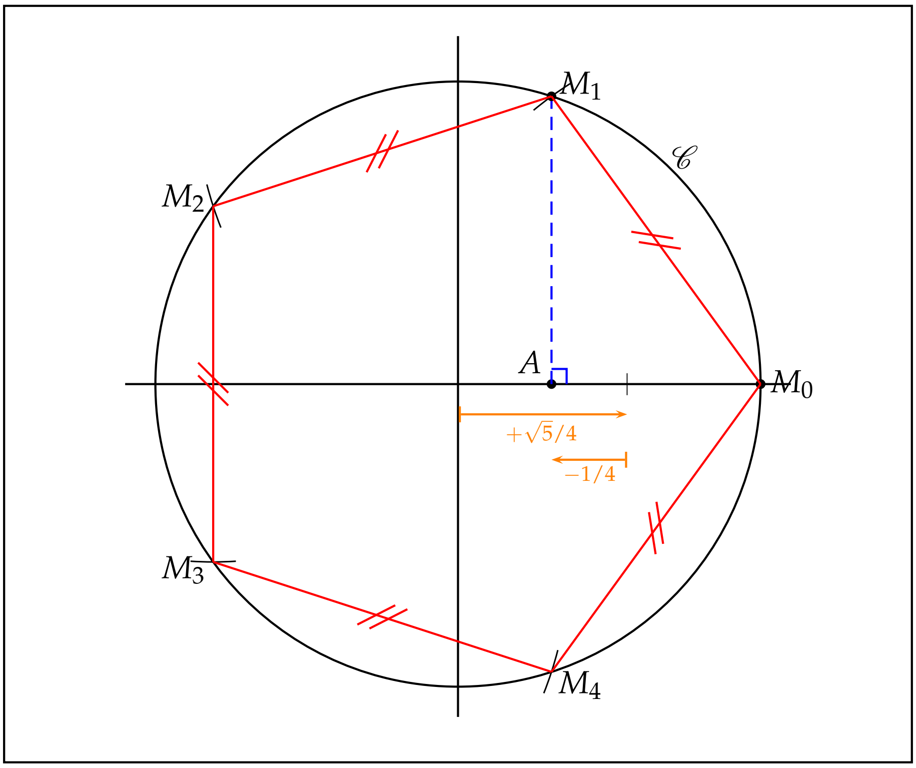
**Solution** :

1. On utilise l'application 2 ci-dessus, ou la somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique.

2. On factorise l'expression de la première question par $\rho^2 \neq 0$, on simplifie les deux membres par $\frac{1}{\rho^2}$ et ce qui reste répond à la question.

3. On détermine d'abord que $\rho + \frac{1}{\rho} = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ par le calcul direct (on connaît $\rho$ !). Ensuite, on sait que ce nombre est la racine positive du polynôme $X^2 + X - 1$. Après calcul, on détermine alors que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
Pour « construire » une telle longueur, il suffit alors de tracer un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent respectivement $1/2$ et $1/4$. Le théorème de Pytagore nous assure alors que l'hypothénuse mesure $\sqrt{5}/4$. On sait aussi construire $1/4$, et faire une différence de mesures à la règle et au compas, ce qui nous donne notre construction de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

4. On place d'abord le point d'abscisse 1, noté $M_0$. Ensuite, on place le point $A$ d'abscisse $\cos(2\pi/5)$ et son projeté $M_1$ sur le cercle unité $\mathscr{C}$ parallèlement à l'axe des ordonnées. Il suffit ensuite de reporter sur la mesure $M_0M_1$ sur le cercle pour obtenir les trois autres points $M_2, M_3$ et $M_4$. Voici la figure illustrant cette question :

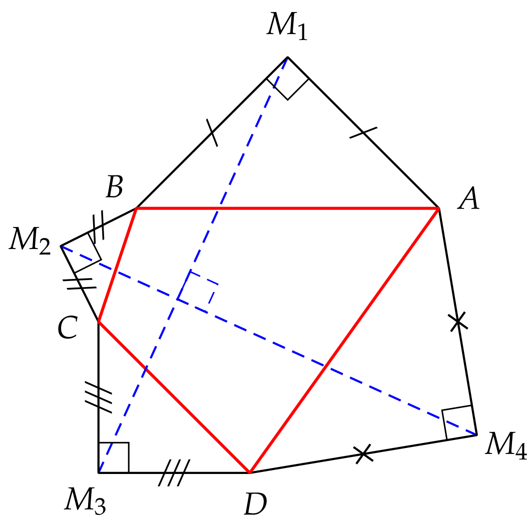



◊

### 20.4.5 Un problème géométrique

**Exercice :** Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit les points $M_1, M_2, M_3$ et $M_4$ de sorte que les triangles respectifs $ABM_1, BCM_2, CDM_3$ et $DAM_4$ soient rectangles isocèles en ces points. Montrer que les droites $(M_1M_3)$ et $(M_2M_4)$ sont perpendiculaires et que $M_1M_3 = M_2M_4$.

**Solution** : Faisons une figure pour mieux voir les choses :




Notons par des lettres minuscules (et éventuellement indicées) les affixes correspondantes à chaque point. L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto iz$ est une rotation puisque $|i| = 1$. Notons alors $r$ la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$ ($\text{Arg}(i) = \pi/2$). On a alors

$$\begin{aligned}
r(\overrightarrow{M_1B}) = \overrightarrow{M_1A} \quad &\Leftrightarrow \quad r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_1}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_1} \\
&\Leftrightarrow \quad r(b - m_1) = a - m_1 \Leftrightarrow a - m_1 = i(b - m_1) \Leftrightarrow m_1(1-i) = a - ib \\
&\Leftrightarrow \quad m_1 = \frac{(a-ib)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{a+b+i(a-b)}{2}.
\end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$m_2 = \frac{b+c+i(b-c)}{2}, \quad m_3 = \frac{c+d+i(c-d)}{2} \quad \text{et} \quad m_4 = \frac{d+a+i(d-a)}{2}.$$

On en déduit alors que $2(m_4 - m_2) = a - b - c + d + i(-a - b + c + d)$. Or

$$\begin{aligned}
& 2(m_3 - m_1) = -a - b + c + d + i(-a + b + c - d) \\
\Leftrightarrow \quad & 2i(m_3 - m_1) = a - b - c + d + i(-a - b + c + d) = 2(m_4 - m_2) \\
\Leftrightarrow \quad & r(m_3 - m_1) = m_4 - m_2 \Leftrightarrow r(\overrightarrow{M_1M_3}) = \overrightarrow{M_2M_4},
\end{aligned}$$

ce qui prouve non seulement que $M_1M_3 = M_2M_4$, mais aussi que les droites $(M_1M_3)$ et $(M_2M_4)$ sont perpendiculaires. $\diamondsuit$