

LEÇON N° 78 :

Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :

- Intégrale d'une fonction sur un segment $[a, b]$;
- Rapport entre l'intégrale d'une fonction et l'aire sous sa courbe.

Notations : Dans toute cette leçon, on se donne

- * Une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles. On supposera $a < b$.
- * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} h = \frac{b-a}{n} ; \\ a_i = a + ih, & \forall i \in \{0, \dots, n\} ; \\ m_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} & \forall i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

- * Par abus de notation, pour toute fonction g définie et continue sur $[a, b]$, on notera $\sup_{[a,b]} |g| = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$.
- * $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.

Contexte : On cherche à obtenir une « bonne » approximation de $I(f)$ quand il est impossible de la calculer analytiquement. L'exemple utilisé dans toutes les annexes A à E est la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [4, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{5\pi}{x} \sin\left(\frac{x^3}{2} - 4x^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Toutes les démonstrations (puisqu'elles sont longues) se trouvent à la fin du document.

78.1 Méthodes d'approximation linéaire

78.1.1 Première approche : méthode des rectangles et des tangentes

Notations : On définit sur $[a, b]$ la fonction r suivante :

$$\begin{aligned} r : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(a_i), \quad \forall x \in [a_i, a_{i+1}[, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \end{aligned}$$

qui approche f sur $[a, b]$. On note $R_n(f) = \int_a^b r(x) dx$ (voir annexe A).

Proposition 1 :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$;

– Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I(f) - R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{[a,b]} |f'|$.

Proposition 1' : On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $(R'_n(f))$ de terme général

$$R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}).$$

Si f est monotone, alors les suites numériques $(R_n(f))_n$ et $(R'_n(f))_n$ encadrent $I(f)$ et convergent vers $I(f)$.

Soit maintenant pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ la fonction τ_i donnant l'équation de la tangente à f au point m_i :

$$\begin{aligned} \tau_i : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(m_i)(x - m_i) + f(m_i). \end{aligned}$$

Notations : On approche alors f sur $[a, b]$ par une fonction m affine par morceaux définie par

$$\begin{aligned} m : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tau_i(x), \quad \forall x \in [a_i, a_{i+1}[, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

On note enfin $M_n(f) = \int_a^b m(x) dx$ (voir annexe B).

Proposition 2 :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$;

– Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I(f) - M_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{[a,b]} |f''|$.

Remarques 1 :

1. En approchant f sur $[a, b]$ par la fonction

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(m_i) \quad \forall x \in [a_i, a_{i+1}[, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \end{aligned}$$

(« méthode des milieux »), on peut montrer qu'on obtient le même résultat qu'avec la méthode des tangentes.

2. Dans la méthode des rectangles, l'erreur est d'ordre $1/n$. On vérifie alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2^1 R_{2n}(f) - R_n(f)}{2^1 - 1} = 2 R_{2n}(f) - R_n(f) = M_n(f).$$

On a donc amélioré la vitesse de convergence, puisque l'erreur est d'ordre $1/n^2$ dans la méthode des tangentes.

78.1.2 Méthode des trapèzes

Notations : Cette fois-ci, on approche f sur $[a, b]$ par une fonction t affine par morceaux définie pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$ sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ par

$$\begin{cases} t(a_i) = f(a_i) \\ t(a_{i+1}) = f(a_{i+1}), \end{cases}$$

On note $T_n(f) = \int_a^b t(x) dx$ (voir annexe C).

Proposition 3 :

$$\begin{aligned} - \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, T_n(f) &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right); \\ - \text{ Si } f \in \mathcal{C}^2([a, b]), \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad |I(f) - T_n(f)| &\leq \frac{(b-a)^3}{12 n^2} \sup_{[a,b]} |f''|. \end{aligned}$$

78.2 Méthode de Simpson (approximation quadratique)

Notations : Dans cette partie, on approche f sur $[a, b]$ par une fonction continue P dont la restriction à chaque $[a_i, a_{i+1}]$ soit un polynôme de degré au plus 2 défini pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$ par

$$\begin{cases} P(a_i) = f(a_i), \\ P(a_{i+1}) = f(a_{i+1}), \\ P(m_i) = f(m_i), \end{cases}$$

On note $S_n(f) = \int_a^b P(x) dx$ (voir annexe D).

Proposition 4 :

$$\begin{aligned} - \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n(f) &= \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_i) + 4f(m_i) + f(a_{i+1})); \\ - \text{ Si } f \in \mathcal{C}^4([a, b]), \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad |I(f) - S_n(f)| &\leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|. \end{aligned}$$

Remarques 2 :

1. Dans la méthode des trapèzes, l'erreur est en $1/n^2$. On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2^2 T_{2n}(f) - T_n(f)}{2^2 - 1} = \frac{4 T_{2n}(f) - T_n(f)}{3} = S_n(f).$$

On a amélioré la vitesse de convergence, car l'erreur n'est qu'en $1/n^4$ dans la méthode de Simpson.

2. On pourra aussi vérifier dans un autre contexte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(f) = \frac{T_n(f) + 2 M_n(f)}{3}.$$

78.3 Autres méthodes

78.3.1 Méthodes de Newton-Cotes

Principe : Soient $n, \ell \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On approche f sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ par le polynôme de degré au plus ℓ qui coïncide avec f aux $(\ell+1)$ points équidistants (a_i et a_{i+1} en sont les premier et dernier), notés L_0, \dots, L_ℓ : c'est la méthode d'ordre ℓ . On note $I_i(f) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$.

$\ell = 1$: Méthode des trapèzes.

$\ell = 2$: Méthode de Simpson.

$\ell = 4$: Méthode de Boole-Villarceau. Dans ce cas, $I_i(f)$ est approchée par $h \sum_{k=0}^4 \lambda_k f(L_k)$, où

$$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{7}{90} \quad ; \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{16}{45} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2}{15}.$$

$\ell = 6$: Méthode de Weddle-Hardy. Dans ce cas, $I_i(f)$ est approchée par $h \sum_{k=0}^6 \lambda_k f(L_k)$, où

$$\lambda_0 = \lambda_6 = \frac{41}{840} \quad ; \quad \lambda_1 = \lambda_5 = \frac{9}{35} \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \frac{9}{280} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{34}{105}.$$

Remarques 3 :

1. Pour $\ell \geq 8$, certains coefficients λ_i sont négatifs, ce qui les rend plus sensibles aux erreurs d'arrondis ;
2. On peut montrer que si ℓ est pair, alors la formule donnée est encore vraie pour les polynômes de degré au plus $\ell+1$;
3. Il suffit ensuite de faire $\sum_{i=0}^{n-1} I_i(f)$ pour obtenir une approximation de $I(f)$;
4. Dans tout ce qui précède, on a appliqué la méthode d'ordre ℓ à **chaque** subdivision de l'intervalle $[a, b]$, ce qui représente énormément de calculs. On aurait pu simplement appliquer la méthode d'ordre ℓ à **tout** l'intervalle $[a, b]$, mais on se rend vite compte qu'il y a des problèmes sur les bords (voir annexe F). Une alternative serait d'approcher f par son polynôme d'interpolation en des points mieux choisis...

78.3.2 Méthode de Gauss

ω étant une fonction donnée, on cherche encore à approcher l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\frac{f(x)}{\omega(x)} \right) \omega(x) dx$$

par une expression du type $\sum_i \lambda_i f(x_i)$. S'il y a $n+1$ points à définir, on choisit les racines $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ du $(n+1)$ -ième polynôme orthogonal associé au poids ω , pour le produit scalaire défini par

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) \omega(x) dx,$$

de sorte que l'intervalle $[a, b]$ soit divisé en n parties non forcément de taille égale.

Si $]a, b[=]-1, 1[$, alors on choisit souvent :

(i) $\omega(x) = 1$, ce qui donne les polynômes de Legendre ;

(ii) $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui donne les polynômes de Tchebychev.

78.3.3 Exemple ($n = 10$) : annexe F

Soient

$$f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \omega :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\cos(x)}{10x^2 + 1}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Soient P_1 (resp. P_2) le polynôme d'interpolation de f aux points équidistants (resp. de Tchebychev) et P la fonction obtenue en appliquant la méthode des trapèzes à f sur chacun des 10 sous-intervalles. On trouve alors les résultats suivants :

$$\int_{-1}^1 P_1(x) dx \approx 0.78611 \quad ; \quad \int_{-1}^1 P_2(x) dx \approx 0.65067 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 P(x) dx \approx 0.64733.$$

Enfin, un logiciel de calcul formel tel que Maple nous assure que

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx 0.64788.$$

Accélération de convergence (Richardson-Romberg) (pour la culture)

Plaçons-nous sur $I^i := [a_i, a_{i+1}]$. On divise cet intervalle en 2^m parties égales de longueur $h/2^m$ pour $m \in \mathbb{N}$. On note pour simplifier $I_{\ell,m}$ la valeur approchée de $\int_{I^i} f(x) dx$ par la méthode d'ordre ℓ . Notons alors que $I_{1,m} = T_{2^m}$. On accélère ainsi la convergence sur chaque intervalle I^i en appliquant la formule suivante :

$$I_{\ell+1,m} = \frac{2^{2\ell} I_{\ell,m+1} - I_{\ell,m}}{2^{2\ell} - 1} \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*.$$

L'erreur commise après application de cette méthode sera de l'ordre de $1/n^{2\ell}$.

Par exemple, pour la méthode de Simpson (d'ordre 2), on détermine par ce biais que

$$I_{2,m}^i = \frac{2^2 I_{1,m+1}^i - I_{1,m}^i}{2^2 - 1} = \frac{4 T_{2^{m+1}} - T_{2^m}}{3},$$

et on retrouve la formule énoncée en remarque (attention : dans la remarque, on parle de T_{2n} sur I_i , ce qui veut simplement dire que *tout* l'intervalle $[a, b]$ a été divisé en $2n$ segments égaux, c'est-à-dire que chaque intervalle I^i a été divisé en 2, il suffit alors de prendre $m = 0$ dans cette formule).

Voici les différentes démonstrations des résultats énoncés dans cette leçon :

démonstration (proposition 1) : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - h f(a_i) \right| = \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) - f(a_i) \, dx \right| \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(a_i)| \, dx.$$

Or tout x de $[a_i, a_{i+1}[$ vérifie $|f(x) - f(a_i)| \leq \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f'| |x - a_i| \leq \sup_{[a, b]} |f'| |x - a_i|$, d'après l'inégalité des accroissements finis, d'où

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - h f(a_i) \right| \leq \sup_{[a, b]} |f'| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i) \, dx.$$

Or le calcul nous donne que

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i) \, dx = \left[\frac{(x - a_i)^2}{2} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} = \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{2} = \frac{h^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{2n^2}.$$

En additionnant la dernière inégalité selon $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on trouve alors

$$|I(f) - R_n(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[a, b]} |f'| \frac{(b - a)^2}{2n^2} = \frac{(b - a)^2}{2n} \sup_{[a, b]} |f'|.$$

Enfin, $\frac{(b - a)^2}{2} \sup_{[a, b]} |f'|$ étant une constante réelle, le théorème d'encadrement nous permet de conclure que $R_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I(f)$. ■

démonstration (proposition 1') : Supposons que f soit croissante, de sorte que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $f(a_{i+1}) \geq f(a_i)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |R'_n(f) - R_n(f)| &= \frac{b - a}{n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - f(a_i) \right| \\ &= \frac{b - a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - f(a_i) \\ &= \frac{b - a}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Puisque $(b - a)(f(b) - f(a))$ est une constante réelle, il s'en suit par le théorème d'encadrement que $|R'_n(f) - R_n(f)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. De plus,

$$|R'_n(f) - I(f)| \leq |R'_n(f) - R_n(f)| + |R_n(f) - I(f)|,$$

ce qui nous permet de conclure, par le même théorème, que $R'_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I(f)$.

Par construction de ces deux suites, et puisque f est supposée croissante, il est évident qu'elles encadrent $I(f)$. Le cas où f serait décroissante se traite de la même manière. ■

démonstration (proposition 2) :

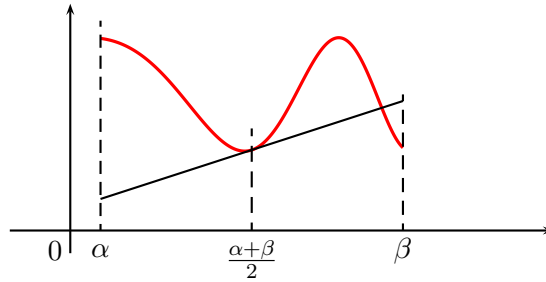
– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} m(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tau_i(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \tau_i(m_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i).$$

L'avant-dernière égalité provient du lemme suivant :

Lemme 1 : Soit $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine. Alors on a l'égalité suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = (\beta - \alpha) g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$



démonstration (lemme 1) :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (ax + b) dx = \left[\frac{a}{2}x + bx \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{a}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha) \\ &= (\beta - \alpha) \left(a \frac{\alpha + \beta}{2} + b \right) = (\beta - \alpha) g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

– Définissons pour tout $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{a_i}^{m_i+t} f(x) dx. \end{aligned}$$

Notons $H = [-h/2, h/2]$ et $H^\circ =] - h/2, h/2[$. Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 par hypothèse, ψ est de classe \mathcal{C}^3 , et pour tout élément $x \in H$, $\psi'(t) = f(m_i + t)$, $\psi''(t) = f'(m_i + t)$ et $\psi^{(3)}(t) = f''(m_i + t)$. On peut ainsi appliquer la formule de Mac-Laurin (i.e. Taylor-Lagrange en 0...), ce qui nous donne :

$$\forall t \in H^\circ, \exists \varepsilon \in H^\circ \mid \psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{t^2}{2}\psi''(0) + \frac{t^3}{6}\psi^{(3)}(\varepsilon).$$

On applique alors cette formule respectivement à $h/2$ et $-h/2$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \psi\left(\frac{h}{2}\right) = \psi(0) + \frac{h}{2} f(m_i) + \frac{h^2}{8} f'(m_i) + \frac{h^3}{48} f''(m_i + \varepsilon), \\ \psi\left(-\frac{h}{2}\right) = \psi(0) - \frac{h}{2} f(m_i) + \frac{h^2}{8} f'(m_i) - \frac{h^3}{48} f''(m_i + \varepsilon). \end{cases}$$

Par suite, en faisant la différence, on trouve

$$\psi\left(\frac{h}{2}\right) - \psi\left(-\frac{h}{2}\right) = h f(m_i) + \frac{2h^3}{48} f''(m_i + \varepsilon).$$

Or $\psi\left(\frac{h}{2}\right) - \psi\left(-\frac{h}{2}\right) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx - \int_{a_i}^{a_i} f(x) dx = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$, donc

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \psi\left(\frac{h}{2}\right) - \psi\left(-\frac{h}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} h f(m_i) + \frac{h^3}{24} f''(m_i + \varepsilon).$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} |I(f) - M_n(f)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left[h f(m_i) + \frac{h^3}{24} f''(m_i + \varepsilon) \right] - h \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) \right| \leq \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} |f''(m_i + \varepsilon)| \\ &\leq \frac{(b-a)^3}{24 n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f''| \leq \frac{(b-a)^3}{24 n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[a, b]} |f''| = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} \sup_{[a, b]} |f''|. \end{aligned}$$

Le théorème d'encadrement permet alors d'en déduire la convergence $M_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I(f)$. ■

démonstration (proposition 3) :

– Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$, l'aire du trapèze formé entre les points d'abscisses a_i et a_{i+1} est

$$\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} \frac{b - a}{n}.$$

En faisant une somme de l'aire de tous les trapèzes, on trouve alors :

$$T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} \frac{b - a}{n} = \frac{b - a}{n} \left(\frac{f(a_0) + f(a_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2f(a_i)}{2} \right).$$

– Pour l'instant, fixons i dans $\{0, \dots, n-1\}$, et considérons l'intervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$. Définissons alors pour tout $x \in I_i$ et un élément $\theta \in]a_i, a_{i+1}[$ la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - t(x) - \frac{f(\theta) - t(\theta)}{(\theta - a_i)(\theta - a_{i+1})} (x - a_i)(x - a_{i+1}),$$

de sorte que $\varphi(\theta) = 0$.

On constate alors que φ est de classe \mathcal{C}^2 sur I_i (en tant que somme de f qui est \mathcal{C}^2 par hypothèse, t affine et donc \mathcal{C}^∞ , et une fonction polynôme de degré 2). Par application du théorème de Rolle, puisque $\varphi(a_i) = \varphi(a_{i+1}) = \varphi(\theta)$, il vient qu'il existe deux constantes $d_i \in]a_i, \theta[$ et $e_i \in]\theta, a_{i+1}[$ telles que $\varphi'(d_i) = \varphi'(e_i) = 0$. Mais puisque $d_i < e_i$, on peut à nouveau appliquer ce théorème à φ' pour en déduire que

$$\exists c_i \in]d_i, e_i[\subset]a_i, a_{i+1}[\quad | \quad \varphi''(c_i) = 0.$$

Par calcul, on peut écrire que tout $x \in I_i$ vérifie l'égalité

$$\varphi''(x) = f''(x) - 2 \frac{f(\theta) - t(\theta)}{(\theta - a_i)(\theta - a_{i+1})},$$

et combinée à $\varphi''(c_i) = 0$, on en déduit la suite d'implications suivantes :

$$\begin{aligned} f(\theta) - t(\theta) &= \frac{f''(c_i)}{2} (\theta - a_i)(\theta - a_{i+1}) \\ \Rightarrow |f(\theta) - t(\theta)| &\leq \frac{1}{2} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f''| |(\theta - a_i)(\theta - a_{i+1})| \\ \Rightarrow \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(\theta) - t(\theta)| d\theta &\leq \frac{1}{2} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f''| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\theta - a_i)(a_{i+1} - \theta) d\theta \\ \Rightarrow \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(\theta) - t(\theta)| d\theta &\leq \frac{1}{2} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f''| \frac{(a_{i+1} - a_i)^3}{6} = \frac{h^3}{12} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f''|. \end{aligned}$$

Finalement, il ne reste qu'à sommer chacune des inégalités selon $i \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} |I(f) - T_n(f)| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b t(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) - t(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - t(x)| dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - t(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f''| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{12 n^3} \sup_{[a, b]} |f''| = \frac{(b-a)^3}{12 n^2} \sup_{[a, b]} |f''|. \end{aligned}$$

Du fait que $\frac{(b-a)^3}{12} \sup_{[a, b]} |f''|$ soit une constante réelle, le théorème d'encadrement permet de conclure que $T_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I(f)$. ■

démonstration (proposition 4) :

– **Lemme 2 (formule des trois niveaux) :** Si φ est un polynôme de degré au plus à 2 défini sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{6} \left(\varphi(\alpha) + 4\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \varphi(\beta) \right).$$

démonstration : lemme 2 ■

Posons $P(t) = \mu t^2 + \nu t + \omega$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx &= \mu \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} + \nu \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} + \omega [t]_{\alpha}^{\beta} = \mu \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} + \nu \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + \omega(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\beta - \alpha}{6} (2\mu(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3\nu(\alpha + \beta) + 6\omega) \\ &= \frac{\beta - \alpha}{6} \left[(\mu\alpha^2 + \nu\alpha + \omega) + 4\left(\mu \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \nu \frac{\alpha + \beta}{2} + \omega \right) + (\mu\beta^2 + \nu\beta + \omega) \right] \\ &= \frac{\beta - \alpha}{6} \left(\varphi(\alpha) + 4\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \varphi(\beta) \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat recherché. ■

L'égalité est donc immédiate : on applique ce lemme sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, puis il suffit de sommer chaque égalité pour arriver à ce résultat.

– Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \left[0, \frac{h}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{m_i-t}^{m_i+t} f(x) \, dx - (f(m_i-t) + f(m_i+t) + 4f(m_i)) \frac{t}{3} + \frac{2^5 t^5}{2880} A, \end{aligned}$$

où A est un réel qui annule ϕ au point $\frac{h}{2}$.

Par application du théorème de Rolle (après avoir vérifié que c'est possible) à ϕ sur l'intervalle $[0, \frac{h}{2}]$, on obtient l'existence d'une constante $\xi \in]0, \frac{h}{2}[$ telle que $\phi'(\xi) = 0$. Or pour tout $t \in [0, \frac{h}{2}]$,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= f(m_i+t) + f(m_i-t) - \frac{1}{3}(f(m_i-t) + f(m_i+t) + 4f(m_i)) \\ &\quad - \frac{t}{3}(f'(m_i+t) - f'(m_i-t)) + \frac{1}{18} t^4 A. \end{aligned}$$

On applique à nouveau ce théorème à ϕ' , puis à ϕ'' , et on en déduit l'existence d'un élément $\zeta \in]0, \frac{h}{2}[$ tel que $\phi^{(3)}(\zeta) = 0$, d'où (on calcule comme ci-dessus $\phi^{(3)}(x)$ puis on traduit l'égalité $\phi^{(3)}(\zeta) = 0$) :

$$A = \frac{f^{(3)}(m_i + \zeta) - f^{(3)}(m_i - \zeta)}{2\zeta}.$$

Appliquons alors la formule des accroissements finis à $f^{(3)}$ sur l'intervalle $[m_i - \zeta, m_i + \zeta]$, elle nous donne une constante λ dans ce dernier qui vérifie alors $A = f^{(4)}(\lambda)$. En conclusion,

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - \frac{h}{6}(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f(m_i)) + \frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\lambda) = 0,$$

et l'on en déduit enfin la majoration suivante :

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - \frac{h}{6}(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f(m_i)) \right| \leq \frac{h^5}{2880} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f^{(4)}|.$$

On peut maintenant conclure quant à la majoration de l'erreur. En effet, on somme les inégalités appliquées à chaque intervalle de la subdivision de $[a, b]$:

$$\begin{aligned} I(f) - S_n(f) &= \left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}(f(a_i) + 4f(m_i) + f(a_{i+1})) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - \frac{h}{6}(f(a_i) + 4f(m_i) + f(a_{i+1})) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^5}{2880} \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |f^{(4)}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^5}{2880 n^5} \sup_{[a,b]} |f^{(4)}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|. \end{aligned}$$

La convergence annoncée se déduit alors du théorème d'encadrement. ■

78.4 Commentaires

1. Pour la proposition 1', il est stipulé que les suites $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(R'_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ encadrent $I(f)$ et convergent vers cette même valeur $I(f)$. Il est important de souligner que ces suites **ne sont pas** adjacentes !! S'il est facile de montrer que leur différence tend vers 0, il est impossible de montrer que l'une est croissante et l'autre décroissante, sauf si l'on divise notre intervalle $[a, b]$ en 2 à chaque étape, autrement dit de considérer les suites $(R_{2^n}(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(R'_{2^n}(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour s'en convaincre, considérer la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto x + \frac{\cos(10\pi x) - 1}{10\pi}. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que f est strictement croissante sur $[0, 1]$ (pour être plus précis, sa courbe est de Lorenz, c'est-à-dire que la fonction est définie sur $[0, 1]$, y est strictement croissante, que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et enfin que tout $x \in [0, 1]$ vérifie l'inégalité $f(x) \leq x$). Si l'on pense que les suites $(R_n(f))$ et $(R'_n(f))$ sont respectivement croissante et décroissante, il suffit de vérifier que $R_6(f) < R_5(f)$ et $R'_5(f) > R'_4(f)$, ce qui suffit à dire que ces suites ne sont pas adjacentes. . .

2. La deuxième remarque de 1.1 et la deuxième de 2 sont des cas particuliers de la méthode d'accélération de Richardson-Romberg. J'ai tenté de la développer dans cette leçon, mais le manque de temps à l'épreuve ne m'avait permis que de citer cette méthode oralement. Elle ferait plutôt l'objet d'un paragraphe spécifique dans une leçon d'agrégation, et n'est pas indispensable ici. A noter que la remarque de 1.1 fournit une accélération de convergence qui ne rentre pas dans la méthode de Richardson-Romberg, mais s'en inspire.
3. La proposition 4 aurait pu être un théorème, bien qu'elle n'apporte pas plus d'informations que les autres propositions (elles se ressemblent toutes comme deux gouttes d'eau !). Cela dit, c'est la méthode implantée actuellement dans la plupart des machines à calculer, lorsque l'on demande de donner une valeur approchée d'une intégrale connue, ou lorsqu'un logiciel de calcul formel n'arrive justement pas à déterminer la primitive d'une fonction. Pour cette même proposition, il existe une alternative de démonstration ne supposant pas connue la constante 2880 qui apparaît dans la majoration. Elle ne sera pas développée ici parce qu'elle est longue et certainement moins facile à retenir qu'une simple constante. . .
4. Les méthodes générales de Newton-Côtes sont données plus à titre existentiel qu'instructif. Il n'est pas demandé de retenir toutes les constantes λ_i , mais il est toujours bon de savoir qu'une telle méthode généralisable existe, et savoir en donner les traits (à savoir que la fonction est approchée par son polynôme d'interpolation de Newton aux $\ell + 1$ points équidistants).
5. Le point 3.2 aurait une meilleure place dans une leçon d'agrégation, d'autant plus que cette méthode est rarement étudiée au cours du cycle universitaire. Cela dit, le fait de proposer cette méthode, même oralement, ouvre le débat à la pertinence du choix pour le calcul d'une intégrale définie : faut-il plutôt augmenter le nombre de divisions de l'intervalle, l'ordre de la méthode ou choisir des points non forcément équidistants ?
6. Les différentes annexes ont été créées grâce à Maple 10. Il est évident que l'on ne disposera pas d'un tel matériel le jour de l'oral. Pour ceux que ça intéresse, il y a en seconde annexe à ce document

une capture d'écran donnant un programme tournant sur TI Voyage 200 calculant une intégrale par la méthode des trapèzes (la partie traçage peut naturellement être omise. . .). J'attire l'attention aussi sur le fait qu'on voit sur les figures de Maple une évaluation de l'erreur commise : il s'agit de l'erreur entre l'intégrale calculée par la méthode correspondant à la figure et celle que Maple calcule en valeur approchée, et **non** la valeur de l'intégrale. Maple n'est pas infaillible, et fait aussi quelques erreurs d'arrondi en calcul approché. . .

7. J'ai mis toutes les démonstrations, un peu plus détaillées que dans la plupart des livres où l'on peut les trouver. Puisqu'aucune démonstration n'a été faite pendant la présentation (trop longues), je n'avais pas jugé utile de placer les outils utilisés en pré-requis, à savoir :
- Formules de Taylor (prop. 2),
 - Théorème de Rolle (prop. 3 & 4),
 - Formule des accroissements finis (prop. 4).