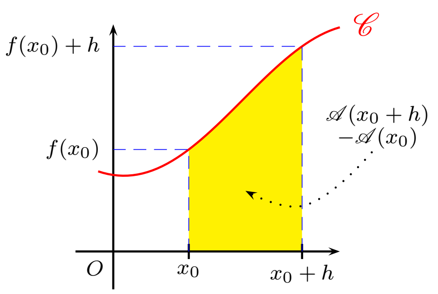
LEÇON N° 76 :

Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.

Pré-requis :
- *Si f est une fonction numérique dérivable sur $]a, b[$ telle que $f' = 0$ (resp. $\geqslant 0$), alors f est constante (resp. croissante) ;*
- *Si $f \in \mathscr{C}^0\big([a, b]\big)$, alors $f\big([a, b]\big)$ est un intervalle fermé borné.*

Approche intuitive

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a, b]$ (avec $a < b$) et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère othonormal. Pour $x_0 \in [a, b]$, on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire qui est délimitée par l'axe des abscisses, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = x_0$.



Pour tout $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} & h\, f(x_0) \leqslant \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) \leqslant h\big(g(x_0) + \varepsilon\big) \\ \Leftrightarrow \quad & f(x_0) \leqslant \frac{1}{h}\big(\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)\big) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \\ \overset{h \to 0 (\Rightarrow \varepsilon \to 0)}{\Rightarrow} \quad & \mathscr{A}'(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{A}' = f$ sur l'intervalle I.

76.1 Primitives d'une fonction continue

Définition 1 : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable et $F' = f$.

Théorème 1 : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f admet au moins une primitive sur I.

`Remarque 1` : Ce théorème est admis.

Théorème 2 : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant pour primitive F. Alors $\{x \mapsto F(x)+c, c \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des primitives de f sur I. De plus, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

démonstration *: F est dérivable sur I, donc pour tout $c \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) + c$ l'est aussi sur I. Posons alors $\widetilde{F}_c(x) = F(x)+c$. Alors $\widetilde{F}_c'(c)+F'(x) = f(x)$, donc $\widetilde{F}_c$ est une primitive de f sur I. De plus, si $\widetilde{F}_c$ et $\widetilde{F}_{c'}$ sont deux primitives telles que $\widetilde{F}_c(x_0) = \widetilde{F}_{c'}(x_0) = y_0$, alors en particulier, $F(x)+c = F(x)+c'$, d'où $c = c'$.* ■

Corollaire 1 : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant pour primitive F. Pour toute primitive G de f sur I contenant a et b, $F(a) - F(b) = G(a) - G(b)$.

démonstration *: Il existe une contante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \in I$, on a $G(x) + F(x) + c$, donc $G(a) - G(b) = F(a) + c - \big(F(b) + c\big) = F(a) - F(b)$.* ■

76.2 Recherche d'une primitive

76.2.1 Tableau inverse de dérivées

I	$\overset{(n\in\mathbb{N})}{\subset \mathbb{R}}$	$\overset{(n\geqslant 2)}{\subset \mathbb{R}}$	$\subset \mathbb{R}_+^*$	$\subset \mathbb{R}$	$\subset \mathbb{R}$	$\subset \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$
$f(x)$	x^n	x^{-n}	$1/\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$	$1 + \tan^2 x = \cos^{-2} x$
$F(x)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{x^{1-n}}{1-n}$	$2\sqrt{x}$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$

76.2.2 Propriétés usuelles

Soient u et v admettant pour primitives U et V sur I. Alors :
- ⋄ $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v$ admet pour primitive $\alpha U + \beta V$;
- ⋄ $\forall\ a \neq 0$, $x \mapsto u(ax + b)$ admet pour primitive $\dfrac{1}{a}\ U(ax + b)$;
- ⋄ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u \cdot U^n$ admet pour primitive $\dfrac{U^{n+1}}{n+1}$.

Si v admet pour primitive V sur $J \subset \mathbb{R}$ tel que $U(I) \subset J$, alors $V \circ U$ est une primitive de $u \cdot (v \circ U)$ sur I.

76.3 Définition et propriétés de l'intégrale

Définition 2 : Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $a, b \in I$ ($a \leqslant b$). On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre $F(b) - F(a)$, noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\big[F(t)\big]_a^b$, où F est une primitive de f sur I.

`Remarques 2 :`
- Cette définition ne dépend pas de la primitive choisie (corollaire 1).
- On a en particulier $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 3 : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ($a \in I$) est LA primitive de f sur I s'annulant en a.

démonstration : *f admet une primitive G. Alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) = G(x) - G(a)$. Donc $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, d'où F est bien une primitive de f. Or $F(a) = F(a) - G(a) = 0$, donc d'après le théorème 2, F est l'unique primitive de f s'annulant en a.* ■

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x).$$

Proposition 1 : soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Alors :

(i) Pour tous $a, b, c \in I$, on a $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (relation de Chasles) ;

(ii) Pour tous $a, b \in I$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

démonstration :

(i) Puisque f est continue sur I, elle admet une primitve F sur I. Il vient que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Si F et G désignent des primitives de f et g sur I, alors les propriétés du paragraphe 2.2 nous assurent que $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$. Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,\mathrm{d}t &= \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) \\ &= \alpha\big(F(b) - F(a)\big) - \beta\big(G(b) - G(a)\big) \\ &= \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé. ■

Proposition 2 : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Alors pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

démonstration : *Soit F une primitive de f sur I. Alors $F' = f \geqslant 0$, donc F est croissante. Par suite,*

$$F(b) \geqslant F(a) \quad \Leftrightarrow \quad F(b) - F(a) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

■

Proposition 2' : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive telle qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors pour tous $a, b \in I$ vérifiant $a \leqslant b$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

démonstration : *f est continue signifie qu'il existe $[c,d] \subset [a,b](c<d)$ tel que pour tout $x \in ,d]$, $f(x) > f(x_0)/2$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \geqslant \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t > \frac{1}{2}\int_c^d f(x_0)\,\mathrm{d}t = \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0.$$

■

Corollaire 2 : Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f \leqslant g$ sur I. Alors pour tous $a, b \in I$ vérifiant $a \leqslant b$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \in_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

démonstration : *On a par hypothèse $g - f \geqslant 0$ sur I, donc*

$$\int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\textit{prop 1}}{=} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 3 : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tous $a, b \in I$, on a $|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

démonstration : *Rappelons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$ (il s'agit de l'inégalité triangulaire). Sur I, posons $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. D'après la proposition 2, $f^+, f^- \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f^+, \int_a^b f^- \geqslant 0$, donc*

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b f^+ - f^-\right| = \left|\left|\int_a^b f^+\right| - \left|\int_a^b f^-\right|\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^b f^+\right| + \left|\int_a^b f^-\right| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- \overset{\textit{prop 1}}{=} \int_a^b f^+ + f^- \\
\left|\int_a^b f\right| &\leqslant \int_a^b |f|.
\end{aligned}$$

■

Exercice :

– Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

– Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, et

$$\begin{array}{rcl} n : \mathscr{C}^0([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \varphi : \left(\mathscr{C}^0([a,b])\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Montrer que n est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b])$ et que φ est un produit scalaire.

__Solution__ :

– Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On peut supposer, quitte à échanger leurs rôles, que $x \leqslant y$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \overset{\text{coro 2}}{\Leftrightarrow} \int_x^y -1\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y \cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y 1\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow [-t]_x^y \leqslant [\sin(t)]_x^y \leqslant [t]_x^y \Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

– Rappelons tout d'abord qu'une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application N à valeurs positives et satisfaisant les critères de séparation, d'homogénéité et d'inégalité triangulaire. n est déjà une application à valeurs positives. Vérifions alors les autres points :

Séparation : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ tel que $n(f) = 0$. Montrons alors par l'absurde que $f = 0$. Supposons donc que $f \neq 0$. Il existe alors $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et la proposition 2' nous assure alors que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$. En appliquant ensuite le corollaire 3, on obtient l'inégalité suivante :

$$0 < \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ceci implique alors que $n(f) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On obtient donc bien l'implication $n(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Homogénéité : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Alors

$$n(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\lambda| \cdot |f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda| \int_a^b |f(t)\,\mathrm{d}t = |\lambda| n(f).$$

Inégalité triangulaire : Soient enfin $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b)]$. Alors

$$n(f+g) = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t \overset{\text{coro 2}}{\leqslant} \int_a^b |f(t)| + |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t = n(f) + n(g).$$

Rappelons ensuite qu'une application est un produit scalaire si elle est bilinéaire, symétrique, positive et séparée. Vérifions ces quatre points pour l'application φ :

Positivité : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Montrons que $\varphi(f,f) \geqslant 0$: $\varphi(f,f) = \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \overset{\text{prop 2}}{\geqslant} 0$.

Séparation : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Montrons par l'absurde que $\varphi(f,f) = 0 \Rightarrow f = 0$. Supposons que $f \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors $f(x_0)^2 \neq 0$, et la proposition 2' nous assure que $\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t > 0$, ou encore $\varphi(f,f) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Par conséquent, il vient que $f = 0$.

Bilinéarité : Cette propriété ne sera vérifiée que pour f, les rôles de f et g étant symétriques dans φ. Supposons g constante. Alors pour tous $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1+f_2, g) &= \int_a^b \big(f_1(t)+f_2(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)g(t) + f_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \varphi(f_1,g) + \varphi(f_2,g), \\
\text{et}\quad \varphi(\lambda f_1, g) &= \int_a^b \big(\lambda f_1(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(f_1,g).
\end{aligned}$$

Symétrie : La symétrie est assurée par la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$: $f(t)g(t) = g(t)f(t)$.

Théorème 4 (inégalité de la moyenne) : Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. S'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f \leqslant M$ sur I, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$.

démonstration *: Pour tout $x \in I$,*

$$f(x) - m \geqslant 0 \overset{\text{prop 2}}{\Rightarrow} \int_a^b f(t) - m\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre de la même manière que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$. ■

76.4 Applications

Exercice : Calculer l'aire entre une parabole ($x \mapsto x^2$) et une sécante entre les deux points d'intersection.

Solution : Soit $p : x \mapsto x^2$ et $d : y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) une droite qui coupe la parabole p en deux points distincts, d'abscisses $X < Y$. Alors d'après ce qui a été vu en introduction de cette leçon, l'aire recherchée est égale à la différence entre l'aire sous la parabole et l'aire sous la droite. p et d sont deux applications continues, elles admettent donc des primitives P et D sur I. Puisque « $\mathscr{A}' = f$ », on a alors « $\mathscr{A} = F$ », où F désigne une primitive de f. L'aire recherché est finalement égale à :

$$\int_X^Y p(t)\,\mathrm{d}t - \int_X^Y d(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_X^Y - \left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_X^Y = \frac{Y^3 - X^3}{3} - a\frac{Y^2 - X^2}{2} - b(Y - X).$$

Dans la pratique,
- Si l'on connaît l'équation de d, un système nous permet de trouver les coordonnées (surtout les abscisses) des points d'intersection.
- Si l'on connaît les abscisses des points d'intersection, on connaît aussi grâce à p leurs ordonnées, et un système nous permet de déterminer l'équation de la droite d.

Dans les deux cas, l'équation d et les abscisses X et Y nécessaires sont déterminables.

Définition 3 : Soient $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé des l'espace, $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$ et $\mathscr{S}$ un solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$. Alors le volume de $\mathscr{S}$ est donné par la formule

$$\mathscr{V}(\mathscr{S}) = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z,$$

où S représente l'aire de la section de $\mathscr{S}$ par le plan de cote z.

Exemples : Cette formule permet le calcul de volumes de cônes, de cylindres, de boules, ...

En physique...

◇ Le travail d'une force $\vec{F}(x)$ appliquée à un point matériel se déplaçant le long d'un segment $[AB]$, avec A et B d'abscisses respectives a et b est

$$W = \int_a^b \vec{F}(t) \cdot \vec{\imath}\,\mathrm{d}t,$$

où $\vec{\imath}$ est unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens.

◇ **Définition 4** : La valeur efficace sur $[a, b]$ de la fonction continue f est

$$\mu_e = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

◇ **Exercice** : Montrer que l'expression de l'intensité efficace d'un courant alternatif sinusoïdal est $I_e = \dfrac{I\sqrt{2}}{2}$.

Solution : L'intensité efficace I_e d'un courant est l'intensité que devrait avoir un courant continu pour produire dans un même conducteur ohmique, le même dégagement de chaleur pendant le même temps de passage. Notons alors R la résistance du conducteur ohmique, $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi)$ l'intensité variable du courant et T la période variable du courant.

L'énergie fournie avec le courant continu est $E = R \cdot I_e^2 \cdot T$ sur une période T.
L'énergie fournie avec le courant alternatif est $E = \int_0^T R \cdot i^2(t)\,\mathrm{d}t$ sur une période T.

On en déduit que

$$E = R \cdot I_e^2 \cdot T = \int_0^T R \cdot i^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot I_e^2 \cdot T = R \cdot I^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot I_e^2 \cdot T = R \cdot I^2 \cdot \frac{T}{2},$$

d'où on tire finalement $I_e = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{I\sqrt{2}}{2}$.