LEÇON N° 75 :

Applications de la dérivation à l'étude d'extrémums éventuels d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :
– *Notions de continuité et de dérivabilité ;*
– *Formule de Taylor-Young ;*
– f *continue* $\Rightarrow \exists\, m, M \mid f([a,b]) \subset [m, M]$.

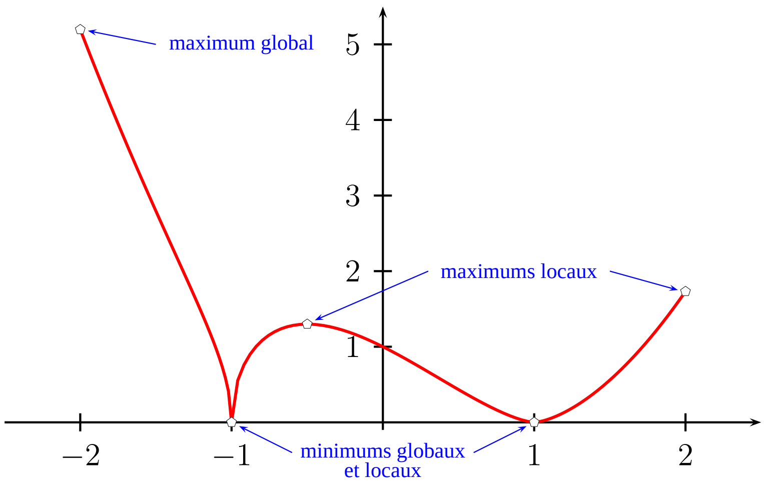
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

75.1 Extremums

Exemple d'introduction :

Soit f la fonction, dont la représentation graphique se trouve ci-contre, définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{|(x+1)(x-1)^3|}. \end{array}$$



`Remarques 1:`

– Si I était ouvert, on n'aurait pas de maximum global en -2.
– Par conséquent, un maximum ou minimum global peut ne pas exister.

Définition 1 : Soit $a \in I$. On suppose que I est compact.
- **On dit que f *admet un maximum global (resp. minimum global) en a* si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). Dans ce cas, $f(a)$ est appelé *maximum (resp. minimum) de f sur I*.**
- **On dit que f *admet un maximum local (resp. minimum local) en a* s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que pour tout $x \in J \cap I$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).**

75.2 Recherche d'extremums

75.2.1 Condition nécessaire

Théorème 1 : Si f est dérivable en $x_0 \in I^\circ$ et admet un extrémum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

démonstration *: Il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ en supposant par exemple que f admette un maximum local en x_0. Soit alors g la fonction continue définie par :*

$$\begin{array}{rcl} g : I \backslash \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{array}$$

g est positive sur $]x_0 - h, x_0[$ et négative sur $]x_0, x_0 + h[$, d'où $g(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} 0$, soit $f'(x_0) = 0$. ■

`Remarques 2:`

1. La dérivabilité n'est pas nécessaire pour avoir un extremum : par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais admet un minimum global en 0.
2. La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais n'admet pas d'extremum en 0.

Conséquence : Les extremums sont donc à chercher parmi :

◇ les points de I° où f est dérivable de nombre dérivé nul ;
◇ les points où f est non dérivable ;
◇ les éventuelles extrémités de I.

Définition 2 : Ces points sont appelés *points critiques de f*.

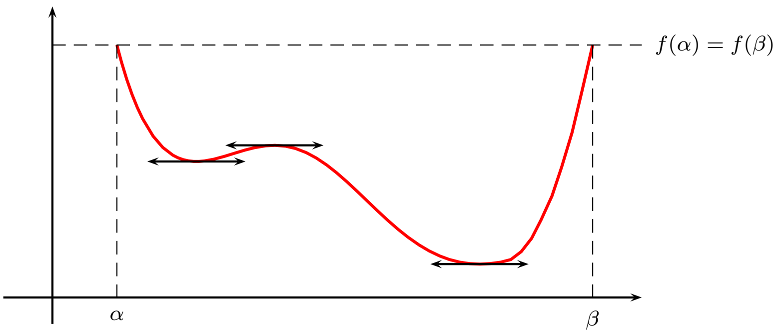
Théorème 2 (de Rolle) : Soit $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$, telle que $f(\alpha) = f(\beta)$. Alors

$$\exists\, \gamma \in]\alpha, \beta[\mid f'(\gamma) = 0.$$

démonstration *: Si f est constante, tout point de $]\alpha, \beta[$ admet son image par f pour extremum local, donc d'après le théorème 1, $f' \equiv 0$ sur $]\alpha, \beta[$.*

Supposons alors f non constante. Or f continue implique l'existence de deux nombres $m < M$ tels que $f([\alpha, \beta]) \subset [m, M]$. L'une des bornes diffère de $f(\alpha)$, par exemple $M > f(\alpha)$. Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\gamma) = M$, de sorte que f admette un maximum global en γ. D'après le théorème 1, $f'(\gamma) = 0$. ■

Interprétation graphique :



Corollaire 1 : Soit f continue sur I, dérivable sur I°.

(i) Si $f' > 0$ sur I°, alors f est strictement croissante sur I ;

(ii) Si $f' < 0$ sur I°, alors f est strictement décroissante sur I ;

(iii) Si $f' = 0$ sur I°, alors f est constante sur I.

démonstration : *Le point (iii) a été démontré dans la démonstration précédente. Montrons alors par exemple le point (i). Soient $c, d \in I$ tels que $c < d$. On veut montrer que $f(c) < f(d)$. On définit une fonction g par*

$$\begin{array}{rcl} g : [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c), \end{array}$$

qui est clairement dérivable sur $]c,d[$ et continue sur $[c,d]$. De plus, $g(c) = g(d) = f(c)$, donc le théorème de Rolle nous assure qu'il existe $e \in]c,d[$ tel que $g'(e) = 0$. Or, pour tout $x \in]c,d[$, on a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

Donc

$$0 = f'(e) - \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \quad \Leftrightarrow \quad f'(e) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \overset{\text{hypothèse}}{>} 0.$$

Puisque $c < d$, cette dernière inégalité implique que $f(d) - f(c) > 0$, c'est-à-dire $f(c) < f(d)$. Le point (ii) se montre de manière totalement analogue. ■

`Remarque 3` : Ce résultat est admis au lycée. . .

75.2.2 Condition suffisante

Théorème 3 : Soient $a \in I^\circ$ et f dérivable sur I°. Si $f'(a) = 0$ et f' s'annule en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

démonstration : *On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que (par exemple) $f'(x) < 0$ sur $]a-h, a[$ et $f'(x) > 0$ sur $]a, a+h[$. D'après le corollaire précédent, f est alors strictement décroissante (resp. croissante) sur $[a-h, a]$ (resp. $[a, a+h]$). Donc $f(a)$ est un extremum local.* ■

Théorème 4 : On suppose que f est deux fois dérivable au voisinage de a, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (resp. < 0). Alors f admet un minimum local (resp. maximum local) en a.

démonstration : *Supposons $f''(a) > 0$. Alors on a, grâce à la formule de Taylor-Young appliquée à f en a, que pour tout $x \in [a-h, a+h]$,*

$$\begin{aligned} & f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o\big((x-a)^2\big) \quad \textit{avec } o\big((x-a)^2\big) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o\big((x-a)^2\big) \quad \textit{car } f'(a) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o\big((x-a)^2\big). \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) > 0$ quand $x \neq a$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta$ et $x \neq a$ impliquent $\big|o\big((x-a)^2\big)\big| < \varepsilon$. D'où $f(x) - f(a) > 0$ quand $x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\}$, donc $f(x) - f(a) \geqslant 0$ quand $x \in [a-h, a+h]$. Par définition, $f(a)$ est alors un minimum local. ■

Remarque 4 :

– La condition est suffisante, mais pas nécessaire. Par exemple, prenons la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2\left(2 - \sin\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant f(0) = 0$, donc 0 est un minimum global. Mais f, bien que dérivable sur $\mathbb{R}$, n'admet pas de dérivée seconde en 0.

– Le théorème 4 peut être généralisé :

Corollaire 2 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est p fois dérivable au voisinage de a avec $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, $f^{(i)}(a) = 0$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$. Alors :

(i) si p est pair, alors f possède un minimum (resp. maximum) local si $f^{(p)}(a) > 0$ (resp. $f^{(p)}(a) < 0$) ;

(ii) si p est impair, alors f ne possède pas d'extremum local.

démonstration : *Si p est pair, la démonstration est analogue à celle du théorème 4. Supposons alors p impair. Alors, la formule de Taylor-Young appliquée à f en a à l'ordre p donne finalement, sous les conditions du corollaire*

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{p!}(x-a)^p f^{(p)}(a) + o\big((x-a)^p\big).$$

La fonction $x \mapsto (x-a)^p f^{(p)}(a)$ change de signe en a et $o\big((x-a)^p\big)$ est négligeable devant cette fonction, donc $f(a)$ n'est pas un extremum local. ■

75.3 Exemples

Exercice : Existe-t-il une valeur α pour laquelle la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \alpha \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x),$$

admet un extremum local en $\dfrac{\pi}{3}$?

Solution : On constate déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (il n'y a donc pas de points où f n'est pas dérivable) et il n'y a pas d'extremums aux extrémités. De plus, pour tout réel x, on a $f'(x) = \alpha\cos x + \cos(3x)$, ce qui implique que $f'(\pi/3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Il vient que

$$f(x) = 2\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x).$$

Reste donc à savoir si $f(\pi/3)$ est un extremum local :

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} - 3\sin\pi = -\sqrt{3} < 0,$$

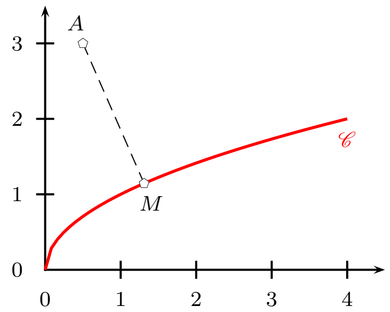
donc d'après le théorème 4, $f(\pi/3)$ est un maximum local pour $\alpha = 2$. ◇

Exercice : Soient $\mathscr{C} : y = \sqrt{x}$ et $A(\frac{1}{2}, 3)$. Déterminer, si elle existe, la distance de A à $\mathscr{C}$.

Solution : Notons déjà que

$$\mathrm{d}(A, \mathscr{C}) = \min_{M \in \mathscr{C}} \mathrm{d}(A, M) = \min_{M \in \mathscr{C}} AM.$$

Faisons un dessin pour mieux voir les choses :



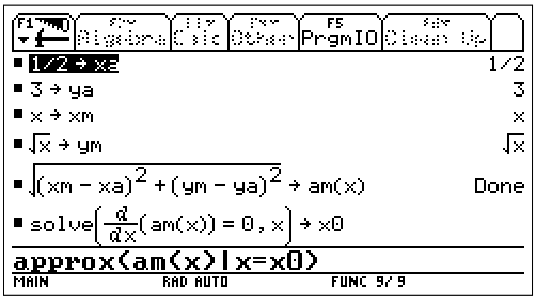
Notons x l'abscisse du point M. Alors

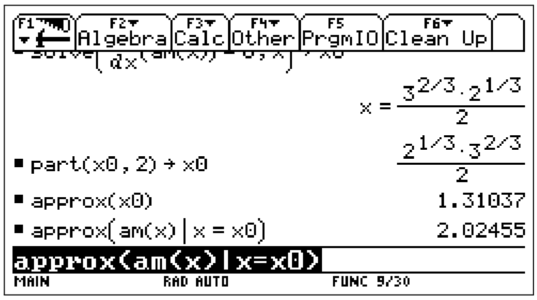
$$
\begin{aligned}
& AM(x)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (3-\sqrt{x})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + 9 - 6\sqrt{x} + x = x^2 + \frac{37}{4} - 6\sqrt{x} \\
\Rightarrow \quad & \big(AM(x)\big)' = 2x - \frac{\sqrt{x}}{3}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\big(AM(x)\big)'$ s'annule en $x \approx \sqrt{1,31}$. De plus, $(AM)''(\sqrt{1,31}) \approx 3 > 0$ donc d'après le théorème 4, le point $M\big(1,31, \sqrt{1,31}\big)$ réalise le minimum global sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto AM(x)$. La distance vaut alors environ $2,0246$.

Reste à voir pour $M(0,0)$ (car $x=0$ est une extrémité et un point où f n'est pas dérivable). On calcule aisément que dans ce cas, $AM \approx 3,04 > 2,0246$.

Conclusion : La distance de A à $\mathscr{C}$ existe, vaut environ $2,0246$ et est réalisée pour $M\big(1,31, \sqrt{1,31}\big) \in \mathscr{C}$. Le point M correspondant à été rajouté sur la figure. Voici enfin les calculs effectués à la calculatrice :





◇