

LEÇON N° 72 :

Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :

- Fonctions citées dans le titre : définition, sens de variations, limites en $\pm\infty$;
- Droite réelle achevée, voisinage épointé d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, noté $\mathcal{V}(x_0)$;
- Opérations élémentaires sur les limites, théorème d'encadrement, ainsi que le théorème de composition des limites : « Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, où $D, E \subset \mathbb{R}$ tels que $f(D) \subset E$. Soient $(a, \ell, L) \in \overline{D} \times \overline{\mathbb{R}}^2$, où $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $L = \lim_{x \rightarrow \ell} g(x)$. Alors $L = \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x)$. »

Dans toute la leçon, x_0 désigne un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

0 La relation de prépondérance

Définition 1 : Soient f, g deux fonctions ne s'annulant pas sur $\mathcal{V}(x_0)$. On dit que f est négligeable devant g (au voisinage de x_0) si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On utilisera la notation de Landau : $f = o(g)$ (ou $f \stackrel{x_0}{=} o(g)$ s'il y a confusion).

Proposition 1 :

- La relation o est transitive ;
- Soient f, g deux fonctions ne s'annulant pas sur $\mathcal{V}(x_0)$. Alors la relation P définie par $f P g \Leftrightarrow ((f = g \text{ ou } f = o(g))$ est une relation d'ordre.

démonstration :

- Soient f, g, h trois fonctions ne s'annulant pas sur $\mathcal{V}(x_0)$ telles que $f = o(g)$ et $g = o(h)$. On utilise la définition :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} \right) = 0,$$

donc $f = o(h)$.

- On vérifie facilement que P est réflexive, transitive et antisymétrique.

Ceci achève la démonstration de cette proposition. ■

Remarque 1 : Puisque la relation o est transitive, on utilisera par commodité la notation de Hardy : $f = o(g) \Leftrightarrow f \ll g$ (ou $f \stackrel{x_0}{\sim} o(g) \Leftrightarrow f \stackrel{x_0}{\ll} g$ s'il y a confusion). Cela nous permettra notamment d'écrire plus intuitivement que $f \ll g \ll h$. Dans la suite, on se permettra même d'écrire par abus de langage $f(x) \ll g(x)$ pour dire que $f \ll g$.

72.1 Croissance comparée entre une fonction puissance et \ln

Théorème 1 : Pour tout réel a strictement positif,

$$\ln x \stackrel{+\infty}{\ll} x^a.$$

démonstration : Soit a un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} \forall u > 1, \quad 0 \leq \ln u < u &\Rightarrow \forall x > 1, \quad 0 \leq \ln(x^{a/2}) < x^{a/2} \\ &\Rightarrow \forall x > 1, \quad 0 \leq \frac{a}{2} \ln x < x^{a/2} \\ &\Rightarrow \forall x > 1, \quad 0 \leq x^{-a} \ln x < \frac{2}{a} x^{-a/2}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{a} x^{-a/2} = 0$; donc le théorème d'encadrement permet de conclure. ■

Remarque 2 : Si a est négatif, alors on a $x^a \ll \ln x$ au voisinage de $+\infty$ (le quotient n'est alors pas une forme indéterminée !).

Corollaire 1 : Pour tout couple $(b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $(\ln x)^c \stackrel{+\infty}{\ll} x^b$.

démonstration : Le résultat est immédiat si $c \leq 0$. Supposons alors $c > 0$. On a ainsi

$$\frac{(\ln x)^c}{x^b} = \left(\frac{\ln x}{x^{b/c}} \right)^c.$$

Puisque b/c est un réel strictement positif, le théorème 1 nous assure que le quotient entre parenthèses tend vers 0 en l'infini. Par application de la fonction continue $X \mapsto X^b$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^c}{x^b} = 0,$$

d'où le résultat. ■

72.2 Croissance comparée entre une fonction puissance et exp

Théorème 2 : Pour tout réel a ,

$$x^a \ll^{+\infty} e^x.$$

démonstration : Soit a un réel quelconque. Alors

$$\frac{x^a}{e^x} = e^{a \ln x - x} = e^{x\left(a \frac{\ln x}{x} - 1\right)}.$$

Le théorème 1 et celui de composition des limites permettent alors de conclure. ■

Corollaire 2 : Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $x^b \ll^{+\infty} e^{ax}$.

démonstration : Le résultat est immédiat si $b \leq 0$. Supposons alors $b > 0$. On a ainsi

$$\frac{x^b}{e^{ax}} = \left(\frac{x^{b/a}}{e^x}\right)^a.$$

Puisque b/a est un réel, le théorème 2 nous assure que le quotient entre parenthèses tend vers 0 en l'infini. Par application de la fonction continue $X \mapsto X^a$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{b/a}}{e^x}\right)^a = 0,$$

d'où le résultat. ■

Récapitulons ce que l'on a démontré jusqu'à présent :

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \quad (\ln x)^c \ll x^b \ll e^{ax}.$$

Remarque 3 : Posons $f_{a,b,c}(x) = e^{ax} x^b (\ln x)^c$ pour des réels a, b, c quelconques. Définissons aussi la relation L d'ordre lexicographique pour deux triplets (a, b, c) et (a', b', c') de \mathbb{R}^3 :

$$(a, b, c) L (a', b', c') \Leftrightarrow (a < a') \text{ ou } (a = a' \text{ et } b < b') \text{ ou } (a = a', b = b' \text{ et } c < c').$$

Il est alors facile de voir que

$$\forall (a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3, \quad f_{a,b,c} P f_{a',b',c'} \Leftrightarrow (a, b, c) L (a', b', c'),$$

de sorte que la relation P sur l'ensemble de fonctions $\{x \mapsto e^{ax} x^b (\ln x)^c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ est une relation d'ordre total.

72.3 Applications

72.3.1 Branches infinies

Fonction	Limite calculée	Branche parabolique de direction	Asymptote
ln	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	(Ox) en $+\infty$	—
exp	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	(Oy) en $+\infty$	—
$x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \ln x}{x} = 0$	(Ox) en $+\infty$	—
$x \mapsto x + 1 + 2e^{-x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1+2e^{-x}}{x} = 0$	(Ox) en $-\infty$	$y = x + 1$ en $+\infty$

72.3.2 Calcul de limites

Exercice 1 : Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

démonstration :

$$\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \left(\frac{x^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x} \right)^x = e^{x(\ln(x^{\frac{\ln x}{x}}) - \ln \ln x)} = e^{x(\ln(e^{\frac{\ln^2 x}{x}}) - \ln \ln x)}.$$

Par le théorème 1 et le théorème de composition des limites, on en déduit que la limite du quotient ci-dessus vaut 0 en $+\infty$. ■

Exercice 2 : Etudier la dérivabilité en 0 et 1 de la fonction définie sur $[0, 1]$ suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

démonstration : f est clairement continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, avec pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x}(\ln x)^{-2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

On en déduit donc les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0,$$

de sorte que f est dérivable en 1, mais pas en 0. ■

Exercice 3 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+nx} dx.$$

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

démonstration :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], 0 \leq x^{n+1} \leq x^{n-1} &\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+nx} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+nx} dx \\ &\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n^2} \ln(1+nx) \right]_0^1 \\ &\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{\ln(1+n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On conclut alors par le théorème d'encadrement. ■

72.3.3 La fonction Gamma d'Euler...

Exercice 4 : Considérons les intégrales dépendant d'un paramètre $x > 0$ suivantes :

$$\varphi(h) = \int_1^h t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \psi(k) = \int_k^1 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Montrer que φ et ψ admettent des limites finies respectivement en $+\infty$ et 0.

démonstration : Attaquons tout d'abord la première fonction. Pour tout réel $x > 0$ fixé, on a $t^{x-1} e^{-t} \ll t^{-2}$ car $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ par le théorème 2. On en déduit l'existence d'un réel $A > 1$ tel que pour tout $h > A$, $\int_A^h t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_A^h \frac{dt}{t}$, et donc

$$\int_A^h t^{x-1} e^{-t} dt \leq \frac{1}{A} - \frac{1}{h} \leq \frac{1}{A}.$$

La fonction φ est donc uniformément bornée en tant que somme d'une quantité bornée et d'un réel fixe (\int_1^A), pour tout $h > A$, donc admet une limite finie quand $h \rightarrow \infty$.

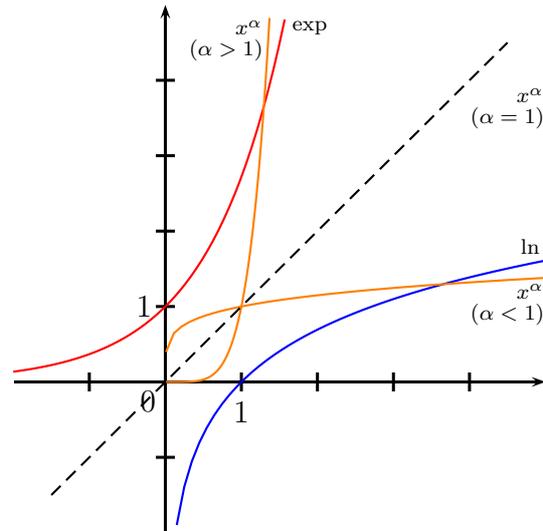
Passons maintenant à la seconde fonction. Pour tout réel $x > 0$ fixé, on a $t^{x-1} e^{-t} \stackrel{0}{\ll} t^{-2}$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ (pas de forme indéterminée). On en déduit l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k < \varepsilon$, $\int_k^\varepsilon t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_k^\varepsilon \frac{dt}{t}$, et donc

$$\int_k^\varepsilon t^{x-1} e^{-t} dt \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{1}{k}.$$

Pour la même raison que précédemment, la fonction ψ admet une limite finie lorsque $k \rightarrow 0$. ■

Remarque 5 : On vient de montrer que l'intégrale $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente pour tout réel x , ce qui définit la « fonction gamma d'Euler », notée $\Gamma(x)$.

72.4 Représentation graphique



© 2010 par Martial LENZEN.

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L. 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteur.