LEÇON N° 65 :

Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites ou de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :
- *Notions de continuité, dérivabilité ;*
- *Théorème des valeurs intermédiaires ;*
- *Intégration.*

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

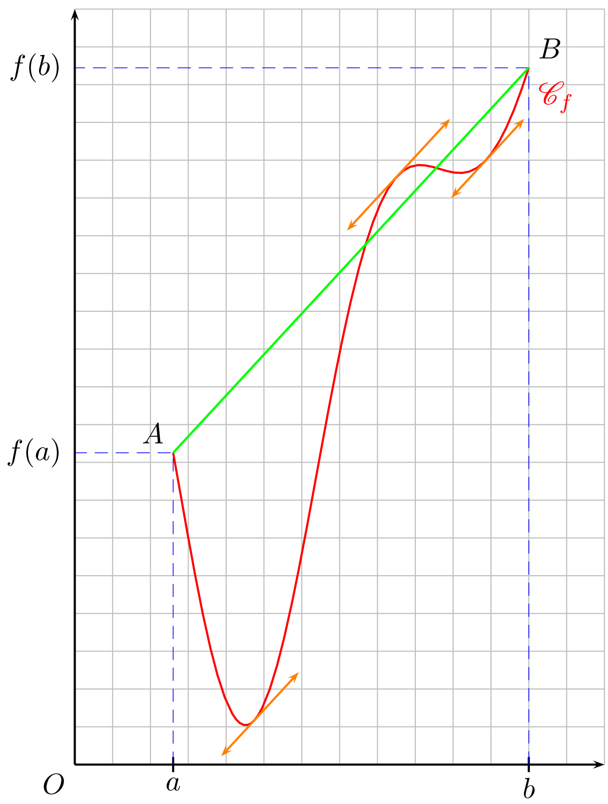
65.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 1 : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

Interprétation géométrique

Il existe au moins un point de $]a, b[$ où la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite (AB), avec $A = \big(a, f(a)\big)$ et $B = \big(b, f(b)\big)$.

Voir figure ci-contre :



démonstration : *Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par*

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $g(b) = g(a) = 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, pour tout x de l'intervalle $]a,b[$,

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

et l'égalité $g'(c) = 0$ donne alors :

$$-f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(c)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

65.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 2 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe deux réels m, M tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors on a :

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M.$$

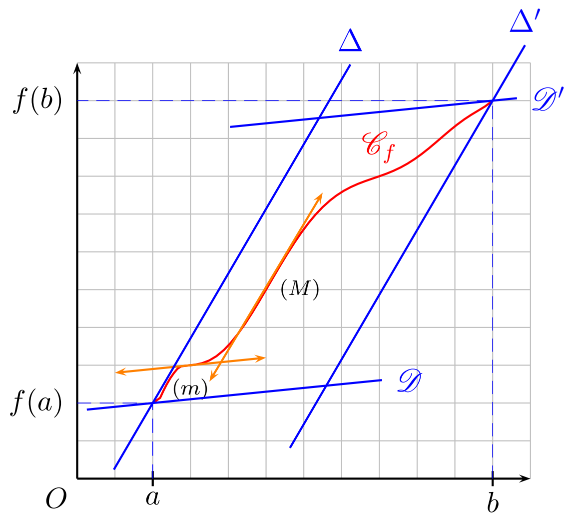
Interprétation géométrique

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f sur $[a,b]$. Soit $x \in [a,b]$.

◇ $x \geqslant a \Rightarrow m(x-a) + f(a) \leqslant f(x) \leqslant M(x-a) + f(a)$,
◇ $x \leqslant b \Rightarrow M(x-b) + f(b) \leqslant f(x) \leqslant m(x-b) + f(b)$.

On note $\mathscr{D} : y = m(x-a)+f(a)$, $\mathscr{D}' : y = m(x-b)+f(b)$, $\Delta : y = M(x-a) + f(a)$ et $\Delta' : y = M(x-b) + f(b)$. Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ est comprise dans le parallélogramme délimité par ces quatre droites.

Voir figure ci-contre :



démonstration : *On a :*

$$\begin{aligned} m \leqslant f'(x) \leqslant M \quad &\Rightarrow \quad m\int_a^b 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b 1\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a) \\ &\Leftrightarrow \quad m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M, \end{aligned}$$

et le résultat est démontré. ■

Corollaire 1 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f'| \leqslant M$ sur $]a,b[$, alors

$$|f'b) - f(a)| \leqslant M\,|b-a|.$$

démonstration : *Reprendre la démonstration du théorème précédent avec $m = -M$.* ■

Définition 1 : Une telle fonction est alors appelée *M-lipschitzienne*.

65.3 Applications

65.3.1 Sens de variations

Théorème 3 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f'(x) \geqslant 0$ sur $]a,b[$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, on a : $f(x) \geqslant f(a)$.

démonstration : *Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathscr{U}_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid f(a) < f(x) + \varepsilon\}$. Montrons que $\mathscr{U}_\varepsilon = [a,b]$.*

Montrons que $\mathscr{U}_\varepsilon \neq \varnothing$: *Trivial, car $a \in \mathscr{U}_\varepsilon$. Soit alors $c = \sup(\mathscr{U}_\varepsilon) \leqslant b$.*

Montrons que $c > a$: *f étant continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que $a \leqslant x \leqslant a+\eta \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon$, d'où $a+\eta \in \mathscr{U}_\varepsilon$. On en déduit que $c \geqslant a+\eta > a$.*

Montrons que $c \in \mathscr{U}_\varepsilon$: *Par définition de la borne supérieure, $c = \lim(x_n)$ où $x_n \in \mathscr{U}_\varepsilon$, soit $f(a) < f(x_n) + \varepsilon$ pour tout entier n. f étant continue en c, on a $f(x_n) \to f(c)$, d'où $f(a) < f(c) + \varepsilon$, c'est-à-dire $c \in \mathscr{U}_\varepsilon$.*

Montrons (par l'absurde) que $c = b$: *Supposons donc que $c < b$, d'où $c \in]a,b[$. Par hypothèse, $f'(c) \geqslant 0$. Or*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

Par continuité de f en c, il existe $\eta' > 0$ tel que $c \leqslant x \leqslant c+\eta'$, impliquant alors que $f(x) \geqslant f(c)$. Puisque $c \in \mathscr{U}_\varepsilon$, on a finalement $f(a) < f(c) + \varepsilon \leqslant f(x) + \varepsilon$. Pour $x = c+\eta'$, on trouve $f(a) < f(c+\eta') + \varepsilon$, ce qui implique que $c+\eta' \in \mathscr{U}_\varepsilon$. Ceci contredit l'égalité $c = \sup(\mathscr{U}_\varepsilon)$, donc $c \geqslant b$. Or c vérifie aussi $c \leqslant b$ (premier point de cette démonstration), donc finalement, $c = b$.

D'où $\mathscr{U}_\varepsilon = [a,b]$, et pour tout $x \in \mathscr{U}_\varepsilon = [a,b]$, on conclut que $f(a) < f(x) + \varepsilon$ donne l'inégalité recherchée : $f(a) \leqslant f(x)$. ■

Corollaire 2 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$ si et seulement si f est croissante sur $[a,b]$.

démonstration :

"$\Leftarrow$" : *Soient $x, y \in [a,b]$ tels que $x \geqslant y$. Alors on a*

$$f(x) \geqslant f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0 \overset{y \to x}{\Rightarrow} f'(x) \geqslant 0.$$

"$\Rightarrow$" : *Pour tout $y \in]a,b[$, f est continue sur $[y,b]$ et dérivable sur $]y,b[$. L'hypothèse $f' \geqslant 0$ sur $]y,b[\subset]a,b[$ assure par le théorème précédent que pour tout $x \in]y,b[$ (donc en fait $x \geqslant y$), $f(x) \geqslant f(y)$.* ■

65.3.2 Encadrements

◇ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow |f'(x)| \leqslant 1$. Donc, par le corollaire 1, on a que pour tous réels x et y,

$$\big|cos(x) - \cos(y)\big| \leqslant |x - y|$$

(l'appliquer sur $[x, y] \subset \mathbb{R}$). De même, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\big|sin(x) - \sin(y)\big| \leqslant |x - y|.$$

Exercice : Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$,

$$\big|\tan(x) - \tan(y)\big| \geqslant |x - y|.$$

<u>Solution</u> : On a :

$$x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1.$$

Or $\arctan'(x) = 1/(x^2+1)$, donc pour tous $X, Y \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan X - \arctan Y| \leqslant |X - Y|$. En prenant x et y de sorte que $X = \tan(x)$ et $Y = \tan(y)$, on arrive au résultat demandé : $|x - y| \leqslant |\tan x - \tan y|$. ◇

◇ On cherche à encadrer $\sqrt{105}$. On considère $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[100, 105]$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{22} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{105}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}.$$

D'après le théorème 2, on obtient donc

$$\frac{1}{22}(105 - 100) \leqslant \sqrt{105} - \sqrt{100} \leqslant \frac{1}{20}(105 - 100) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{22} + 10 \leqslant \sqrt{105} \leqslant \frac{5}{20} + 10,$$

soit finalement $10,227 \leqslant \sqrt{105} \leqslant 10,25$.

65.3.3 Nature de certaines suites

Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f(x) = \ln(x)$, de sorte que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Alors, si $x \in [k, k+1]$,

$$k \leqslant x \leqslant k+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \quad \overset{\text{thm 2}}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant, on trouve alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad &\Leftrightarrow \quad u_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_n \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\lim_{n\to\infty} = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (on dit alors que (u_n) et (v_n) sont équivalentes en $+\infty$).

Remarque 1 : Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ muni d'une norme euclidienne) continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et pour tout $t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leqslant k$. Alors pour tous $x, y \in [a, b]$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,|x - y|$.

démonstration : *On pose*

$$\varphi(t) = \left\langle \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, f(t) \right\rangle.$$

Il suffit alors de calculer $\varphi'(t)$, d'appliquer le théorème de Cauchy-Schwarz afin de majorer $|\varphi'(t)|$, et enfin d'appliquer le corollaire 1 à cette fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. ■

65.3.4 Point fixe

Théorème 4 : Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $k \in]0, 1[$. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Si l'on a $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in]a, b[$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution x^* dans $[a, b]$.

démonstration : *Par hypothèse, $f([a, b]) \subset [a, b]$, donc $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$. Posons alors $g(x) = f(x) - x$, de sorte que $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x^* \in]a, b[$ tel que $g(x^*) = 0$, soit $f(x^*) = x^*$.*

Supposons alors que $\widetilde{x}$ soit une autre solution de l'équation $f(x) = x$. Alors (par le corollaire 1), $|f(x^*) - f(\widetilde{x})| \leqslant k|x^* - \widetilde{x}| \Leftrightarrow (1 - k)\,|x^* - \widetilde{x}| \leqslant 0$. Ok $k \neq 1$, donc on a $|x^* - \widetilde{x}| \leqslant 0 \Leftrightarrow x^* - \widetilde{x}| = 0 \Leftrightarrow x^* = \widetilde{x}$. ■

Corollaire 3 : Si f est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 4, alors la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x^* et l'on a la majoration de l'erreur pour tout n :

$$|u_n - x^*| \leqslant k^n\,|b - a|.$$

démonstration : *f étant continue sur $[a, b]$, on passe à la limite dans la relation la définissant, de sorte que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big),$$

donc $\lim u_n$ est point fixe de f, c'est-à-dire $\lim u_n = x^*$.

De plus, $|u_n - x^*| = |f(u_{n-1}) - f(x^*)| \leqslant k|u_{n-1} - x^*|$ par le corollaire 1. Une récurrence immédiate montre qu'alors, pour tout entier naturel n, $|u_n - x^*| \leqslant k^n\,|u_0 - x^*|$. Or $a \leqslant u_0 \leqslant b$ et $-b \leqslant -x^* \leqslant -a$, donc $a - b \leqslant u_n - x^* \leqslant b - a \Leftrightarrow |u_0 - x^*| \leqslant |b - a|$, et il vient que pour tout entier n, $|u_n - x^*| \leqslant k^n\,|b - a|$. ■

Exercice : Déterminer une valeur approchée au millième, puis à 10^{-4} près, de la solution de l'équation $x^3 + 4x - 1 = 0$.

Solution : Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - {u_n}^3) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On se place dans $[a,b]=[0,\frac{1}{4}]$ et on y définit la fonction $f(x)=\frac{1}{4}(1-x^3)$. On vérifie que $f(0)=\frac{1}{4}\in[0,\frac{1}{4}]$ et

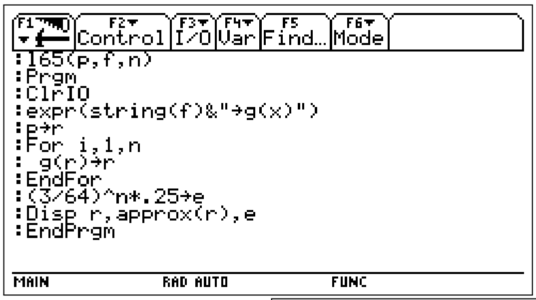
$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^3}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{63}{64}\approx 0,246\in\left[0,\frac{1}{4}\right].$$

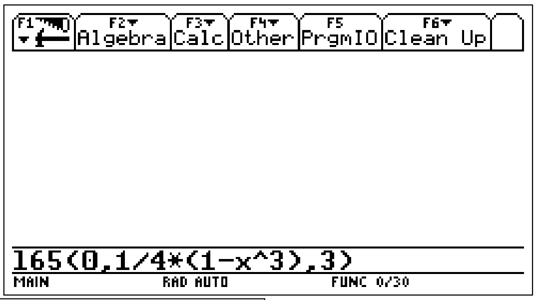
De plus, pour tout $x\in\,]0,\frac{1}{4}[$, on a : $f'(x)=-\frac{3}{4}\;x^2\in[-\frac{3}{4}\,\frac{1}{16},0]=[-\frac{3}{64},0]$, ce qui implique l'existence d'une constante $k=\frac{3}{64}\in\,]0,1[$ telle que $|f'(x)|\leqslant k|$ pour tout $x\in\,]0,\frac{1}{4}[$. D'après le corollaire 3, la suite (u_n) converge donc vers une valeur notée x^*, qui est donc aussi solution de l'équation $f(x)=x$ d'après le théorème 4, c'est-à-dire solution de l'équation donnée.

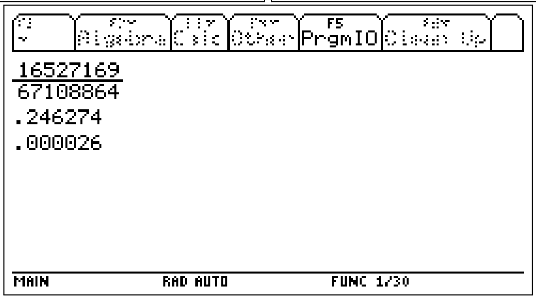
Le corollaire précédent nous affirme aussi que pour tout entier naturel n,

$$|u_n-x^*|\leqslant k^n\;|b-a|\qquad\Leftrightarrow\qquad |u_n-x^*|\leqslant\left(\frac{3}{64}\right)^n\;\frac{1}{4}.$$

On créé alors un programme sur la calculatrice prenant comme argument le premier terme de la suite (ici, 0), l'expression de la fonction (ici, $\frac{1}{4}(1-x^3)$) et l'entier n, et la fonction renverra les valeurs exacte et approchée de u_n, ainsi que sa distance théorique à la limite x^* :







Les calculs donnent en fait : $u_2=63/256\approx 0,246094$ et $|u_2-x^*|\leqslant(\frac{3}{64})^2\frac{1}{2}\leqslant(\frac{3}{60})^2\frac{1}{4}=\frac{1}{1600}=6,25\cdot 10^{-4}$. Par conséquent, on en déduit qu'une valeur approchée de x^* au millième est $x^*\approx 0,246$.

On a aussi $u_3=16527169/67108864\approx 0,246274$ et $u_3-x^*|\leqslant 0,000026=2,6\cdot 10^{-5}$. Finalement, une valeur approchée à 10^{-4} près de x^* est $x^*\approx 0,2462$.

Pour information, un logiciel de calcul formel donne $x^*\approx 0,246266\ldots$ $\diamondsuit$