LEÇON N° 55 :

Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$). Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :
- *Suites et propriétés : convergence, divergence, limite, suites extraites ;*
- *Fonctions logarithme et exponentielle, limites ;*
- *Théorèmes : de récurrence, de comparaison, d'encadrement.*

55.1 Suites de référence

55.1.1 Suite géométrique, utilité

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique de raison* $q \in \mathbb{C}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

On a alors $u_n = q^n\, u_0$ (ou plus généralement, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $u_n = q^{n-k}\, u_k$).

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = a^n$ est géométrique de raison a. En effet,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a^{n+1} = a \cdot a^n = a u_n.$$

Théorème 1 : On considère la suite (a^n) (avec $a \in \mathbb{C}$). Dans ce cas,

(i) Si $|a| > 1$, alors la suite (a^n) est divergente ;

(ii) Si $|a| < 1$, alors $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(iii) Si $|a| = 1$, alors (a^n) est bornée mais divergente, sauf si $a = 1$.

démonstration :

(i) On a

$$|a^n| = |a|^n = \big((|a|-1)+1\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (|a|-1)^k = 1 + n(|a|-1) + R_n(|a|),$$

où $R_n(|a|) > 0$ car $|a|-1>0$. D'où $|a^n| > 1 + n(|a|-1)$, impliquant $|a^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Par conséquent, la suite (a^n) n'est ni bornée, ni convergente.

(ii) $|a|<1$, donc $\frac{1}{|a|} > 1$. Posons alors $b = \frac{1}{|a|}$. D'après (i), $b^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc $|a^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Le résultat s'en déduit (un nombre complexe dont le module tend vers 0, tend lui-même vers 0).

(iii) On considère ici que $|a|=1$. Supposons alors que (a^n) soit convergente, et notons ℓ sa limite. Remarquons qu'alors $|a^n| = |a|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, impliquant $|\ell| = 1$. Alors le passage à la limite dans l'égalité $a^{n+1} = a \cdot a^n$ donne $\ell = a\ell$. Puisque $|\ell|=1$, ℓ est non nul, donc $a=1$. ∎

`Remarque 1` : Si $a \in \mathbb{R}$, on peut préciser que

- Si $a>1$, alors $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$,
  Si $a<1$, alors (a^n) diverge, mais $a^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ et $a^{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$;
- Si $0<a<1$, on peut préciser de plus que (a^n) est strictement décroissante ;
- Si $a=-1$, alors $a^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ et $a^{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$.

Lemme : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

(i) S'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) S'il existe $k>1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \geqslant k|u_n|$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

démonstration :

(i) On montre par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |u_{n_0+m}| \leqslant k^m |u_{n_0}|$. Puisque $|u_{n_0}| \geqslant 0$ et $k \in]0,1[$, $k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) On montre par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $|u_{n_0+m}| \geqslant k^m |u_{n_0}|$. Puisque $|u_{n_0}| \geqslant 0$ et $k>1$, $k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$. On en déduit que $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

∎

Théorème 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe non nulle à partir d'un certain rang N_1, telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admette une limite ℓ de module fini : $|\ell| < +\infty$. Alors :

(i) Si $|\ell|>1$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$;

(ii) Si $|\ell|<1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

démonstration :

(i) Pour tout $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon < |\ell|-1$, il existe un entier $N \geqslant N_1$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$1 < |\ell| - \varepsilon \leqslant \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant |\ell| + \varepsilon,$$

donc $|u_{n+1}| \geqslant (|\ell|-\varepsilon)|u_n|$. Le lemme permet alors de conclure.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - |\ell|$, il existe un entier $N \geqslant N_1$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant |\ell| + \varepsilon < 1,$$

donc $|u_{n+1}| \leqslant (|\ell| + \varepsilon)|u_n|$. Le lemme permet à nouveau de conclure.

■

`Remarque 2` : Les suites géométriques sont en particulier utilisées pour l'étude des points fixes. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par $f(x_n) = x_{n+1}$ (où f est une fonction donnée, vérifiant certaines conditions), alors

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \overset{\text{I.A.F.}}{\leqslant} \sup|f'| \cdot |x_n - x_{n-1}|.$$

Si l'on pose $k = \sup|f'|$, alors une récurrence montre que

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n\, |x_1 - x_0|.$$

55.1.2 Suite puissance

Théorème 3 : On a

(i) Si $b > 0$, alors la suite (n^b) est strictement croissante, et $n^b \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(ii) Si $b = 0$, alors $n^b = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Si $b < 0$, alors la suite (n^b) est strictement décroissante, et $n^b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

démonstration : *On a $n^b = e^{b \ln n}$, et $\ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Alors*

(i) Si $b > 0$, alors $b \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc $n^b \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(ii) Trivial !

(iii) Si $b < 0$, alors $b \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, donc $n^b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

■

55.1.3 Suite factorielle

Théorème 4 : La suite $(n!)$ est croissante tend vers l'infini.

démonstration : *Posons $u_n = n!$, de sorte que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \geqslant 1,$$

donc (u_n) est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2 > 1$, donc le lemme permet de conclure quant à la limite. ■

55.2 Croissance comparée

Définition 2 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes, avec (v_n) non nulle à partir d'un certain rang. Si $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors on dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n \ll v_n$.

`Remarque 3` : Si les deux suites tendent vers l'infini, on dira que la suite (v_n) tend plus vite vers l'infini que (u_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème 5 : La relation $\ll$ est transitive.

démonstration *: Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites complexes telles que $u_n \ll v_n$ et $v_n \ll w_n$. On a donc par hypothèse que $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\left|\dfrac{v_n}{w_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. De plus,*

$$\left|\frac{u_n}{w_n}\right| = \underbrace{\left|\frac{u_n}{v_n}\right|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left|\frac{v_n}{w_n}\right|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Au final, on a bien $u_n \ll w_n$. ■

Théorème 6 : Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Si $|a| > 1$ et $b > 0$, alors $n^b \ll a^n \ll n!$;

(ii) Si $|a| < 1$ et $b < 0$, alors $1/n! \ll a^n \ll n^b$.

démonstration *:*

(i) Posons $u_n = \frac{n^b}{a^n}$ de sorte que $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |\frac{n+1}{n}|^b \cdot \frac{1}{|a|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{|a|}$. Or $|a| > 1$, donc $\frac{1}{|a|} < 1$, et en utilisant le théorème 2, on a que $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où $n^b \ll a^n$.

De la même manière, en posant $v_n = \frac{a^n}{n!}$, on a que $|\frac{v_{n+1}}{v_n}| = \frac{|a|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, puis que $|v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par le théorème 2, donc que $a^n \ll n!$.

(ii) On procède de la même manière :

$$v_n = \frac{1}{n!\,a^n} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{1}{|a|(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \overset{\text{thm 2}}{\Rightarrow} |v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{1}{n!} \ll a^n.$$

$$u_n = \frac{a^n}{n^b} \quad\Rightarrow\quad |u_n| = \frac{n^{-b}}{(\frac{1}{|a|})^n} \overset{\text{(i), car } -b>0 \text{ et } |\frac{1}{a}|>1}{\Longrightarrow} |u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow a^n \ll n^b.$$

■

Théorème 7 : Soient $(\alpha,\beta,b) \in (\mathbb{R}_+)^3$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| > 1$. Les suites $\left((\ln n)^\alpha\right)$, (n^b), $(e^{\beta n})$, (a^n), $(n!)$ et (n^n) tendent vers l'infini, et on a

(i) Si $e^\beta < |a|$, alors $(\ln n)^\alpha \ll n^b \ll e^{\beta n} \ll a^n \ll n! \ll n^n$;

(ii) Si $e^\beta > |a|$, alors $(\ln n)^\alpha \ll n^b \ll a^n \ll e^{\beta n} \ll n! \ll n^n$.

démonstration *: On n'abordera que les points difficiles à démontrer :*

– *Posons $u_n = \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^b}$, de sorte que*

$$\ln u_n = \ln \ln n - \frac{b}{\alpha} \ln n = \ln n \left(\frac{\ln \ln n}{\ln n} - \frac{b}{\alpha} \right).$$

Puisque $\frac{\ln x_n}{x_n} \xrightarrow[x_n \to \infty]{} 0$ et $-b/\alpha < 0$, il vient que $\ln u_n \xrightarrow[x_n \to \infty]{} -\infty$, donc $u_n \xrightarrow[x_n \to \infty]{} 0$. On a donc bien que $(\ln n)^\alpha \ll n^b$.

– *Posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, de sorte que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \xrightarrow[x_n \to \infty]{} e^{-1}.$$

Par le théorème 2, on en déduit que $u_n \xrightarrow[x_n \to \infty]{} 0$, donc $n! \ll n^n$.

■

Exercice : Quelle est la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2^n + n^5}{7^n - n^8}$?

Solution : On a, notamment grâce aux théorèmes 1 et 6 :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n + n^5}{7^n - n^8} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n (1 + \frac{n^5}{2^n})}{7^n (1 - \frac{n^8}{7^n})} \overset{\text{thm 6}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{2^n (1+0)}{7^n (1-0)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{7^n} \overset{\text{thm 1}}{=} 0.$$

D'où le résultat. ◇

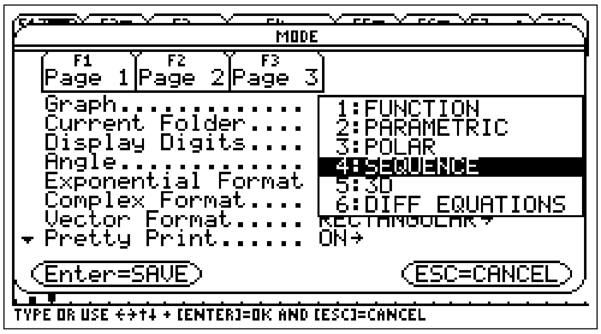
55.3 À la calculatrice

Je ne vois pas beaucoup d'exemples possibles d'application à la calculatrice dans cette leçon, mais je vais quand même donner un exemple de ce qui pourrait être traité :

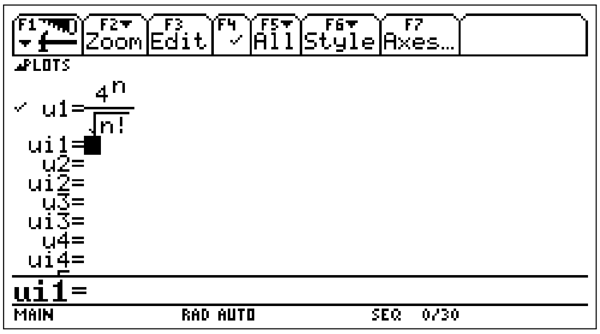
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général défini par

$$u_n = \frac{4^n}{\sqrt{n!}}.$$

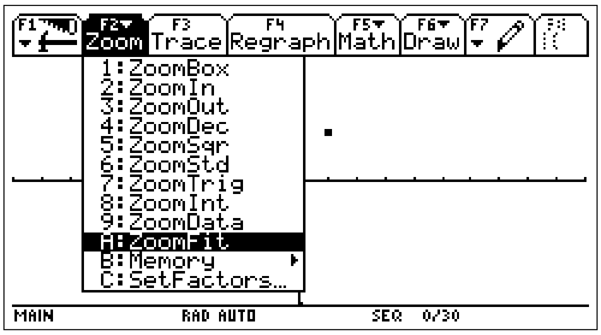
On calcule les dix premiers termes à l'aide de la calculatrice, et l'on constate que la suite semble être croissante. On pourrait donc penser que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$:



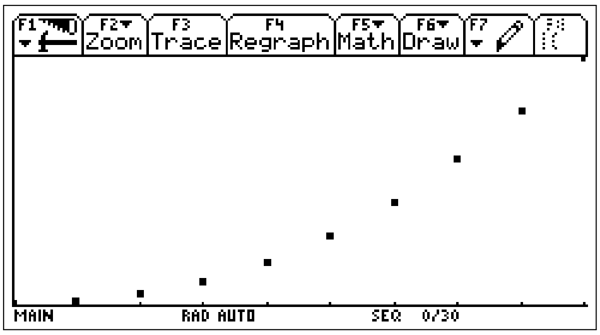
Dans l'écran "Mode", on place "Graph" sur "Sequence"



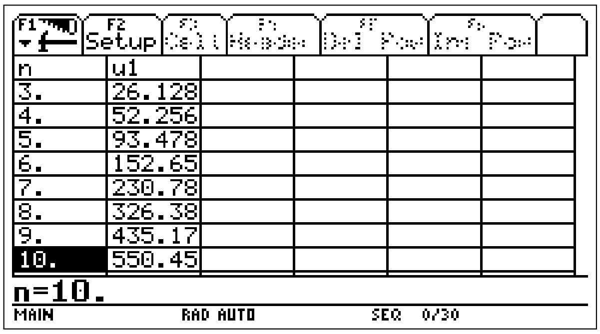
On tape la suite dans l'écran "Y="



On trace la courbe et on zoome (un seul point sinon !)



On observe la croissance présumée



On affiche les valeurs de la suite.

Cette conjecture est fausse : en effet, le théorème 6 nous assure que cette suite tend vers 0. En calculant les termes suivants, on remarque effectivement qu'à partir de $n = 16$, la suite devient décroissante…