LEÇON N° 54 :

Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

Pré-requis :
- *Suites : définition, bornées, convergentes, extraites, unicité de la limite (si elle existe) ;*
- *Toute suite convergente est bornée ;*
- *Limites de fonctions.*

54.1 Suites divergentes

Définition 1 : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente* dans $\mathbb{R}$ si elle ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R}, \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n \geqslant N \mid |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Proposition 1 :

(i) Toute suite non bornée de $\mathbb{R}$ est divergente.

(ii) Toute suite admettant une suite extraite divergente est divergente.

(iii) Toute suite admettant deux suites extraites de limites différentes est divergente.

démonstration *:*

(i) Si une suite est non bornée, elle ne peut pas converger, donc elle diverge.

(ii) Soit $u_{\varphi(n)}$ une suite divergente extraite de (u_n). Alors

$$\forall\, \ell > 0, \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Puisque φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, il existe un entier m tel que $\varphi(n) = m$. On a finalement

$$\forall\, \ell > 0, \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant N \Rightarrow |u_m - \ell| > \varepsilon.$$

C'est la définition de la divergence de la suite (u_n).

(iii) On raisonne par l'absurde en supposant que la suite (u_n) converge. Dans ce cas, la limite est unique. Par conséquent, celle des deux suites extraites est nécessairement la même, ce qui est absurde.

■

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Or $1 \neq -1$, donc la suite (u_n) diverge.
2. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = (-1)^n \times n$. Cette suite est non bornée, donc elle diverge.

54.2 Suite admettant une limite infinie

54.2.1 Définition

Définition 2 : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A \quad (\text{resp. } u_n \leqslant A).$$

On note alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$.

Proposition 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante). Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si (u_n) est non majorée (resp. non minorée).

démonstration :

"$\Rightarrow$" : *évident...*

"$\Leftarrow$" : *(u_n) est non majorée, donc pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$. Or (u_n) est aussi croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant u_N \geqslant A$. Au final, la définition de la divergence de la suite (u_n) est vérifiée.*

■

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(u_n) est clairement croissante . De plus,

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si (u_n) était convergente, on aurait $\lim u_{2n} - u_n = 0$. Or cette limite est supérieure à $1/2$, donc (u_n) diverge. Par conséquent, (u_n) est non majorée.

54.2.2 Comparaison

Théorème 1 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors

(i) $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$; **(ii)** $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

***démonstration** :*

(i) *La limite de* (u_n) *est infinie, donc*

$$\forall\ A \in \mathbb{R}, \exists\ N_1 \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

Or $\exists\ N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N_2, v_n \geqslant u_n$. *Finalement,*

$$\forall\ A \in \mathbb{R}, \exists\ N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow v_n \geqslant A.$$

D'où le résultat.

(ii) *Ce point se démontre de manière analogue.*

■

Corollaire 1 : Pour tout $a > 1$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = +\infty$.

***démonstration** :* $a^n = \big((a-1)+1\big)^n \geqslant 1 + n(\underbrace{a-1}_{>0})$.

Soit $u_n = 1 + n(a-1)$. *Il est clair que* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = +\infty$. ■

Corollaire 2 : S'il existe $a > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant N \Rightarrow u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

***démonstration** :* *Pour tout* $m \geqslant N$,

$$\frac{u_m}{u_N} = \frac{u_m}{u_{m-1}} \times \cdots \times \frac{u_{N+1}}{u_N} \geqslant a^{m-N},$$

donc $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{u_m}{u_N} = +\infty$, *et puisque* $u_N > 0$, $\lim\limits_{m \to \infty} u_m = +\infty$. ■

Exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général positif $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$.
On a que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2}$, et pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{3}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

54.2.3 Opérations algébriques

Théorème 2 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tende vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite. Alors :

(i) Si (v_n) est minorée (resp. majorée), alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ;

(ii) Si (v_n) est minorée (resp. majorée) par une constante strictement positive (resp. négative), alors $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$;

(iii) Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

***démonstration** :*

(i) (v_n) *minorée* $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R} \mid \forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant m$. *De plus,* (u_n) *tend vers l'infini, donc*

$$\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A - m.$$

On en déduit que sous ces conditions, $u_n + v_n \geqslant (A - m) + m = A$. *D'où* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = +\infty$.

(ii) (v_n) *minorée* $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R} \mid \forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant m > 0$. *De plus,* (u_n) *tend vers l'infini, donc*

$$\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A/m.$$

On en déduit que sous ces conditions, $u_n \cdot v_n \geqslant (A/m) \cdot m = A$. *D'où* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$.

(iii) $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$ *car* (u_n) *tend vers l'infini. En posant* $\varepsilon = \frac{1}{A}$, *cette définition devient :*

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon,$$

d'où le résultat.

■

Récapitulatif

1. Limite de la somme :

$\downarrow u_n \quad v_n \rightarrow$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

? désigne une forme indéterminée.

Exemples :
* $u_n = n$ et $v_n = 1 - n$: $u_n + v_n = 1$;
* $u_n = n$ et $v_n = -2n$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = -\infty$.

2. Limite du produit :

$\downarrow u_n \quad v_n \rightarrow$	$\ell = 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

? désigne toujours une forme indéterminée, et ℓ la limite finie de la suite (v_n), quand elle existe.

54.2.4 Composition par une application

Théorème 3 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f une application définie sur $I = [\alpha, +\infty[$ (resp. $]-\infty, \alpha]$) telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$). Alors pour toute suite (x_n) de points de I telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell.$$

démonstration : *La limite de f vaut ℓ, donc :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A \in I \mid \quad x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

De plus, la suite (x_n) tend vers $+\infty$, donc

$$\forall\, K \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow x_n \geqslant K.$$

En posant $A = K$, on a $x_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang, et la première relation devient alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A \in I \mid \quad x_n \geqslant A \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon,$$

d'où le résultat. ■

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$.

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{1+n^2}) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\Big(\underbrace{n\pi + \frac{\pi}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} n\pi}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n^2} = 0$.

3. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p$. On a alors

$$u_n = n^p \underbrace{\left(\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n} + a_p\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a_p},$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \big(\text{signe}(a_p)\big) \cdot (+\infty)$.