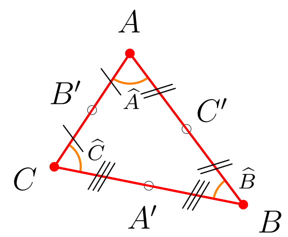
LEÇON N° 34 :

Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra)

Pré-requis :
- *Théorème des milieux, barycentre, coordonnées barycentriques ;*
- *Médiatrice d'un segment, bissectrice d'un secteur angulaire ;*
- *Projetés orthogonaux, théorème de cocyclicité.*

On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$. Nous adopterons aussi quelques notations : étant donné un triangle ABC non aplati, on note respectivement $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les mesures dans $[0, \pi]$ des angles géométriques du triangle ABC, A', B', C' les milieux de $[BC], [AC]$ et $[AB]$, et $a = BC, b = AC$ et $c = AB$.

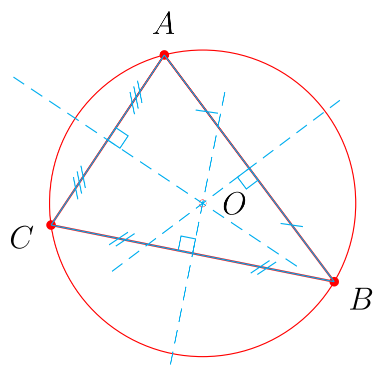


34.1 Médiatrices

Définition 1 : On appelle *médiatrice* toute perpendiculaire à l'un des trois côtés du triangle passant par son milieu.

Théorème 1 : Les trois médiatrices de ABC sont concourantes en un point O équidistant des trois sommets. O est le centre du cercle circonscrit à ABC (i.e. passant par ABC).

Illustrons ceci par une figure :



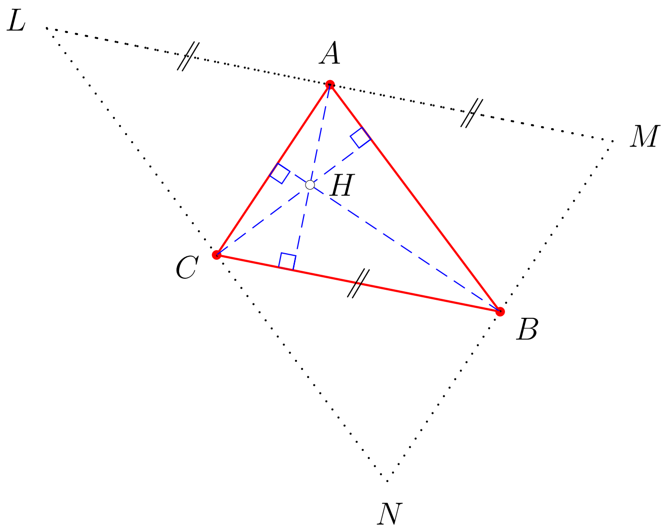
démonstration : *Notons respectivement Δ_A, Δ_B et Δ_C les médiatrices de $[BC], [AC]$ et $[AB]$, et O l'intersection de Δ_A et de Δ_B (existe et est unique car ABC est non aplati). Alors par définition, $OB = OC$ et $OA = OC$, donc $OA = OB$ et $O \in \Delta_C$. L'unicité (resp. l'existence) de cette intersection assure l'unicité (resp. l'existence) du cercle passant par A, B et C.* ■

34.2 Hauteurs

Définition 2 : On appelle *hauteur issue de A* (resp. B, C) dans le triangle ABC la droite passant par A (resp. B, C) et perpendiculaire au côté opposé.

Théorème 2 : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H. Ce point est appelé *orthocentre* du triangle.

Illustrons ceci par une figure :



démonstration : *On définit la droite (ML), parallèle à (BC) passant par A et telle que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{BC}$, et N l'intersection de (BM) et (CL). Alors par le théorème des milieux, les hauteurs de ABC sont les médiatrices de LMN.* ■

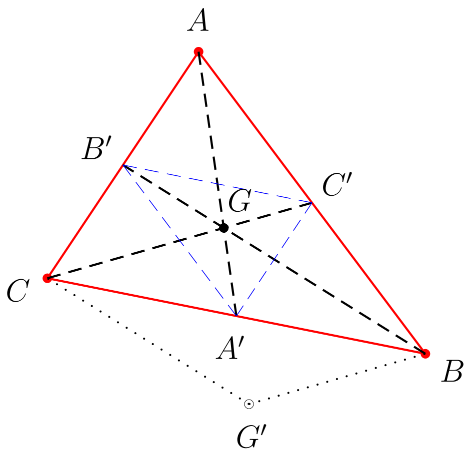
`Remarque 1` : Cette construction exhibe le fait que les médiatrices de ABC sont les hauteurs de $A'B'C'$ (toujours avec le théorème des milieux).

34.3 Médianes

Définition 3 : On appelle *médiane issue de A* (resp. B, C) dans le triangle ABC la droite joignant A (resp. B, C) au milieu du côté opposé.

Théorème 3 : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le point G, isobarycentre des trois sommets. Ce point est appelé *centre de gravité* du triangle.

Illustrons ceci par une figure :



démonstration : *Montrons que l'isobarycentre est sur chacune des médianes. On a l'égalité*

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA}=-(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=-2\overrightarrow{GA'},$$

car A' est le milieu de $[BC]$ implique que A' est le centre du parallélogramme $BGCG'$ et $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BG'}=\overrightarrow{CG'}=2\overrightarrow{GA'}$. Ainsi, $G\in(AA')$. Par permutation circulaire, on trouve que $G\in(BB')$ et $G\in(CC')$. ■

Définition 4 : Le triangle $A'B'C'$ est appelé *triangle médian* de ABC.

Proposition 1 : Le triangle $A'B'C'$ a les mêmes médianes que ABC, et donc le même centre de gravité.

démonstration : *Il suffit de montrer que (AA') est une médiane commune aux deux triangles. On a $A'\in(AA')$ et $\big((AC)\ //\ (A'B')$ (théorème des milieux)$\big)$ qui impliquent que $AB'A'C'$ est un parallélogramme, donc (AA') coupe $[B'C']$ en son milieu.* ■

`Remarque 2` : Les coordonnées barycentriques de G dans (A,B,C) sont $(1,1,1)$.

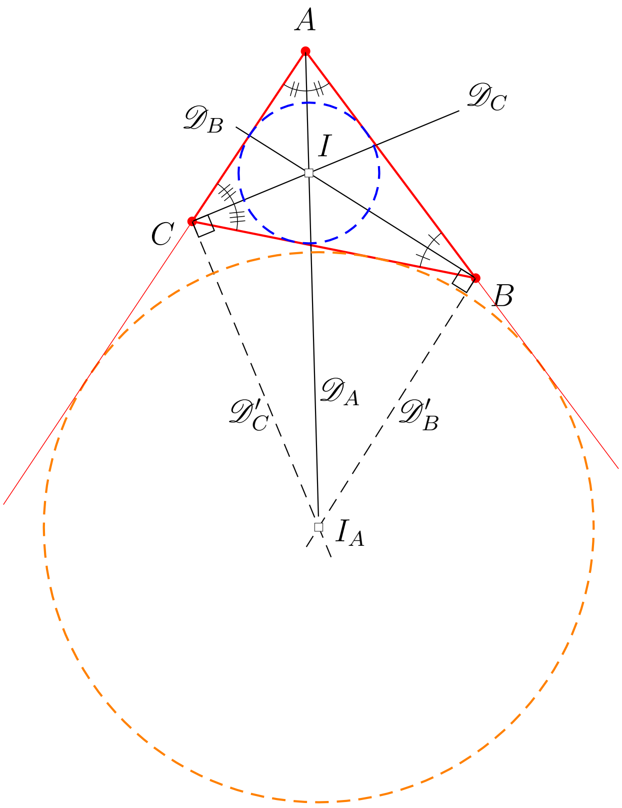
34.4 Bissectrices

Définition 5 : On appelle *bissectrice issue de A* (resp. B,C) dans le triangle ABC l'un des deux axes échangeant (AB) et (AC) (on rappelle qu'un angle de droite est défini modulo π). Si $[AB]$ est échangé avec $[AC]$, on l'appelle alors plus précisément *bissectrice intérieure*, sinon *bissectrice extérieure*.

Notations : On notera $\mathscr{D}_A, \mathscr{D}_B$ et $\mathscr{D}_C$ les bissectrices intérieures issues respectivement de A, B et C, et on primera les bissectrices extérieures.

Théorème 5 :
- **$\mathscr{D}_A$, $\mathscr{D}_B$ et $\mathscr{D}_C$ sont concourantes en un point I, intérieur au triangle ABC, appelé *centre du cercle inscrit à ABC* (parce que tangeant aux trois côtés et intérieur au triangle).**
- **$\mathscr{D}_A$, $\mathscr{D}'_B$ et $\mathscr{D}'_C$ (resp. $\mathscr{D}'_A$, $\mathscr{D}_B$, $\mathscr{D}'_C$ et $\mathscr{D}'_A$, $\mathscr{D}'_B$, $\mathscr{D}_C$) sont concourantes en un point I_A (resp. I_B et I_C), appelé centre du cercle exinscrit au triangle (parce que tangeant aux trois côtés et extérieur au triangle).**

Illustrons ceci par une figure :



démonstration : *Soit $I = \mathscr{D}_B \cap \mathscr{D}_C$ (resp. $I_1 = \mathscr{D}'_B \cap \mathscr{D}'_C$). Alors I est à égale distance des droites (AB) et (AC), ainsi que des droites (AB) et (BC). En effet, soit I un point de $\mathscr{D}_B$, H et K ses projetés orthogonaux respectifs sur (AB) et (AC). Alors $\widehat{KBI} = \widehat{HBI}$, $\widehat{BKI} = \widehat{BHI}$ et les deux triangles BKI et BHI ont le côté $[BI]$ en commun : ils sont donc isométriques, et $IK = IH$ (on montre de la même manière que I_A est à égale distance de (AB) et (BC), ainsi que de (AB) et (AC), ce qui implique que $I_A \in \mathscr{D}_A$). Donc $I \in \mathscr{D}_A$ (resp. $I_A \in \mathscr{D}_A$). En effet, si I est à égale distance des droites (AB) et (AC), alors en notant H et K ses projetés orthogonaux sur (AB) et (AC), il vient que $IK = IH$, $\widehat{IKA} = \widehat{IHA}$ est l'angle droit, et $[IA]$ est un côté commun aux deux triangles IKA et IHA qui sont donc isométriques. D'où $\widehat{KAI} = \widehat{HAI}$ et $I \in \mathscr{D}_A$ (la démonstration est analogue pour I_A).*

***Définition : L'ensemble $\{(AM), M \in [BC]\}$ est appelé* intérieur des droites (AB) et (AC). *L'intérieur commune des trois couples de droites est appelé* intérieur du triangle ABC.**

Montrons que $\mathscr{D}_A$ coupe $[BC]$: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs unitaires des droites (AB) et (AC). Alors $\mathscr{D}_A$ est dirigée par $\vec{u} + \vec{v}$. Soit $Q \in \mathscr{D}_A$ tel que $\overrightarrow{AQ} = \vec{u} + \vec{v}$. Alors $Q(1 - \frac{1}{c} - \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{b})$ dans

(A,B,C), donc $Q\big(bc(1-\frac{1}{c}-\frac{1}{b}), b, c\big)$. On en déduit que $Q' = (b,c)$ dans (B,C), avec $\{Q'\} = (AQ)\cap(BC) = \mathscr{D}_A \cap (BC)$. Or $b, c > 0$, donc $Q' \in [BC]$. Ainsi $\mathscr{D}_A$ est à l'intérieur des droites (AB) et (AC). Par permutation circulaire, on montre que l'intersection des trois bissectrices, I, est à l'intérieur du triangle ABC. ■

Proposition 2 : Si ABC n'est pas isocèle en A, alors en posant $\{M\} = \mathscr{D}_A \cap (BC)$ et $\{N\} = \mathscr{D}'_A \cap (BC)$, on a les égalités

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

démonstration : *Soient K_H (resp. K_N) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur (AB), et H_M (resp. H_N) celui de M (resp. N) sur (AC), et enfin L celui de A sur (BC) (voir figure ci-dessous). Alors*

$$\frac{\mathscr{A}(AMB)}{\mathscr{A}(AMC)} = \frac{MB\cdot AL}{MC\cdot AL} = \frac{AB\cdot MK_M}{AC\cdot MH_M}.$$

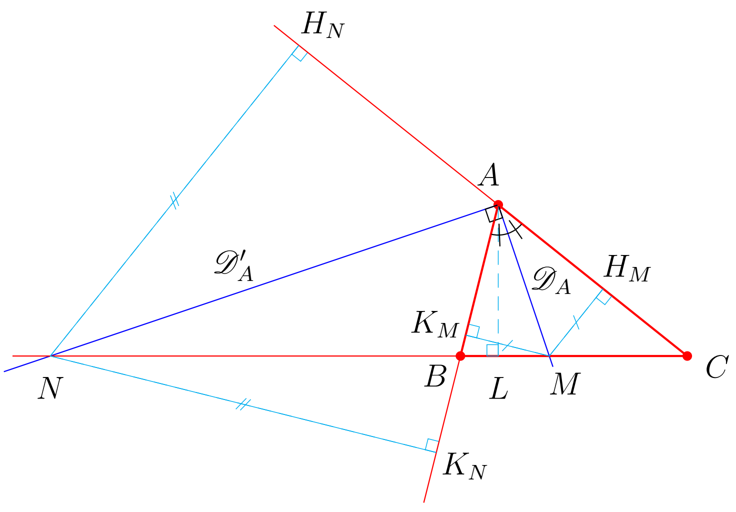
Or $MK_M = MH_M$, car $M \in \mathscr{D}_A$ (ce résultat est démontré dans la démonstration précédente). D'autre part,

$$\frac{\mathscr{A}(ANB)}{\mathscr{A}(ANC)} = \frac{NB\cdot AL}{NC\cdot AL} = \frac{AB\cdot NK_N}{AC\cdot NH_N}.$$

Comme précédemment, on a $NK_N = NH_N$ car $N \in \mathscr{D}'_A$. Au final,

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

■

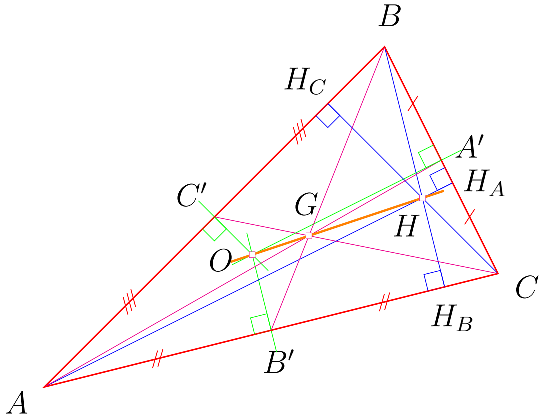


`Remarque 3` : La démonstration du théorème 4 montre que $\mathscr{D}_A$ coupe $[BC]$ en M tel que $b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. On montre de même que $\mathscr{D}'_A$ coupe (BC) en N tel que $b\overrightarrow{NB} - c\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

34.5 Divers

Théorème 5 : Si ABC est un triangle non équilatéral, alors $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. En particulier, les points sont alignés sur une droite nommée *droite d'Euler*.

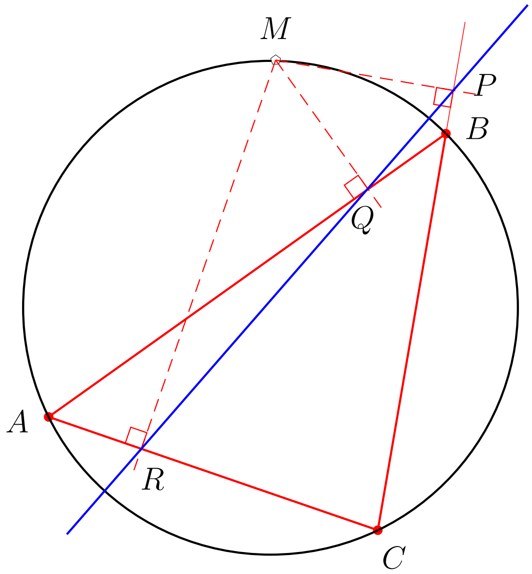
Illustrons ceci par une figure :



démonstration : *Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2. Alors G transforme respectivement A', B', C' en A, B, C (d'après la démonstration du théorème 3). Ainsi $h(AB) = (A'B')$ et la médiatrice de $[AB]$, donc perpendiculaire à (AB) passant par C', sera transformée en la perpendiculaire à $(A'B')$ passant par $h(C') = C$: c'est la hauteur de ABC issue de C. Par permutation circulaire, on montre alors que le point de concours O des médiatrices est donc transformé en H, point de concours des hauteurs de ABC. Ainsi $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.* ■

Proposition 3 : Soient $M \in \mathscr{P}$, et P, Q, R ses projetés orthogonaux sur les trois côtés du triangle. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Si c'est le cas, (PQ) est appelée *droite de Simpson*.

Illustrons ceci par une figure :



démonstration *:* $(AC) \perp (RM)$ *et* $(AB) \perp (QM)$*, donc* $(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MQ}) \pmod{\pi}$*. Par le théorème de cocyclicité, les points* A, M, R, Q *sont cocycliques et la réciproque du théorème donne alors aussi* $(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RM}) = (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AM})$*. On montre de même que* $(BC) \perp (PM)$ *et* $(AC) \perp (RM)$ *impliquent* $(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}) \pmod{\pi}$*. Donc*

$$(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RM}) + (\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}) \pmod{\pi},$$

de sorte que P, Q, R *alignés* $\Leftrightarrow$ $M \in$ *cercle circonscrit à* ABC*.* ■