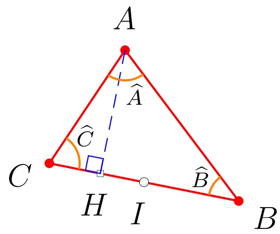
LEÇON N° 32 :

Relations métriques dans le triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.

Pré-requis :
- *Géométrie plane, angle géométrique, mesures algébriques ;*
- *Transformations du plan (construction d'images, propriétés) ;*
- *Théorèmes de Thalès et des milieux.*

On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Nous adopterons aussi quelques notations : étant donné un triangle ABC, on note respectivement $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les mesures dans $[0, \pi]$ des angles géométriques du triangle ABC. I sera systématiquement le milieu du segment $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

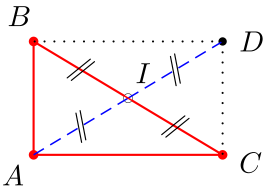


32.1 Relations métriques

Définition 1 : Un triangle ABC est dit *rectangle en A* s'il admet un angle droit en A (autrement dit, si $(AB) \perp (AC)$). Le côté $[BC]$ est alors appelé *hypothénuse* du triangle ABC.

Proposition 1 : L'aire d'un triangle ABC rectangle en A est $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\, AB\, AC$.

démonstration *:*

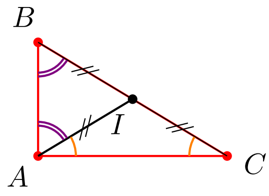


D'après le théorème des milieux, I est sur la médiatrice de $[AC]$, ce qui implique que $IC = IA = IB$. Soit alors D le symétrique de A par rapport à I. On a ainsi que les segments $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en leur milieu et ont même longueur. Le quadrilatère $ABDC$ est donc un rectangle donc l'aire vaut $AB\, AC$. L'aire du triangle ABC est alors immédiatement la moitié de l'aire du rectangle, puisque l'hypothénuse n'est autre qu'une diagonale de ce dernier, et il vient que $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\, AB\, AC$. ■

Proposition 2 : ABC est rectangle en A si et seulement $AI = \frac{1}{2}\, BC$.

***démonstration** :*

Le sens direct a été montré dans la démonstration précédente. Montrons alors le sens indirect. Les triangles BIA et AIC sont tous deux isocèles en I, ce qui signifie que $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$. Or, la somme des angles d'un triangle rectangle étant égale à l'angle plat, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi \Leftrightarrow 2\widehat{A} = \pi \Leftrightarrow \widehat{A} = \pi/2$.
La figure correspond au sens indirect, et le résultat est ainsi démontré.

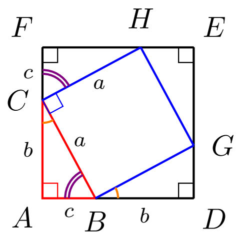


■

Théorème 1 (de Pythagore) : ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

***démonstration** :*

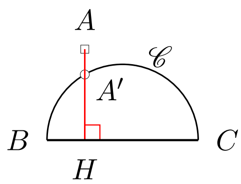
"$\Longrightarrow$" : *On construit la figure ci-contre à partir du triangle ABC. $ADEF$ et $CBGH$ sont des carrés, de sorte qu'on puisse en tirer deux égalités pour $\mathscr{A}(ADEF)$:*



$$\mathscr{A}(ADEF) = (b+c)^2 = a^2 + 4\,\frac{bc}{2}.$$

En développant et simplifiant, on trouve directement que $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

"$\Longleftarrow$" : *Supposons $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Soient $\mathscr{C}$ le demi-cercle de diamètre $[BC]$ contenu dans le demi-plan de frontière (BC) et contenant le point A, et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Alors $\mathscr{C} \cap (AH) = \{A'\} \overset{prop\ 2}{\Rightarrow} BA'C$ rect. en A' $\overset{"\Rightarrow"}{\Rightarrow}$ $BC^2 = A'B^2 + A'C^2$, d'où $AB^2 + AC^2 = A'B^2 + A'C^2$.*



En utilisant à nouveau le sens direct dans les triangles rectangles BHA, BHA' et CHA, CHA', on trouve l'égalité $BH^2 + AH^2 + CH^2 + AH^2 = BH^2 + A'H^2 + CH^2 + A'H^2$, c'est-à-dire $HA = HA'$. Pour conclure, il suffit de remarquer que les points H, A et A' sont alignés et qu'ils sont contenus dans le même demi-plan (avec en particulier H sur la frontière) pour affirmer que $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HA'}$, soit $A = A'$.

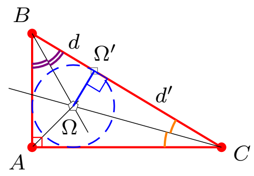
■

`Remarques 1` : * Dans la démonstration du sens "$\Longleftarrow$" de la démonstration précédente, la seule hypothèse que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ne nous garantit pas que (AH) et $\mathscr{C}$ aient une intersection commune. Mais puisque ABH est rectangle en H, on a $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (grâce au sens direct), donc $BH < AB$. L'hypothèse $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donne $AB < BC$. On en déduit que $BH < BC$. Grâce au triangle rectangle ACH, on montre de même que $CH < CB$, d'où $H \in [BC]$.

* Cette démonstration est beaucoup plus rapide avec le produit scalaire (que nous n'avons pas mis en pré-requis). En effet, $BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$. Il suffit alors de remarquer que

$$ABC \text{ est rectangle en } A \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

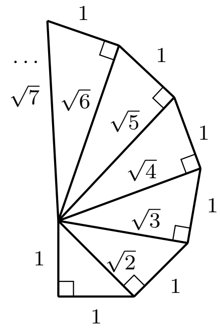
* Voici une autre expression de l'aire d'un triangle rectangle :
Exercice : Soit Ω le centre du cercle inscrit du triangle ABC rectangle en A, et Ω' son projeté orthogonal sur $[BC]$. Monrer que $\mathscr{A}(ABC) = dd'$, où $d = B\Omega'$ et $d' = C\Omega'$.



Solution : Outre les notations déjà introduites, nous allons noter H (resp. K) le projeté orthogonal de Ω sur $[AB]$ (resp. $[AC]$), de sorte que le quadrilatère $AH\Omega K$ soit un carré, donc que $AH = AK = r$, où r désigne le rayon du cercle inscrit. De plus, les triangles $\Omega B\Omega'$ et $\Omega H\Omega'$ sont isométriques, d'où $BH = B\Omega'$, et l'on montre de la même manière que $CK = C\Omega'$. Par suite, $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}(AH + HB)(AK + KC) = \frac{1}{2}(r + d)(r + d') = \frac{1}{2}(rd + rd' + r^2 + dd')$.

On applique ensuite le théorème de Pytagore dans le triangle rectange ABC pour déterminer que $(d+d') = (r+d)^2+(r+d')^2 \Leftrightarrow d^2 + d'^2 + 2dd' = 2r^2 + 2r(d + d') + d^2 + d'^2 \Leftrightarrow dd' = rd + rd' + r^2$, et notre égalité trouvée tout-à-l'heure devient alors $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}(rd + rd' + r^2 + dd') = \frac{1}{2}(dd' + dd') = dd'$, ce qui démontre notre résultat somme toutes étonnant. $\diamondsuit$

Exemple d'application (la spirale des racines entières) : On part d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés autres que l'hypoténuse mesurent 1 unité. L'hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ unités. On place un triangle rectangle sur cette hypoténuse, son côté adjacent à l'angle droit mesurant 1 unité. Alors l'hypoténuse de ce nouveau triangle mesure $\sqrt{3}$ unités, et ainsi de suite…



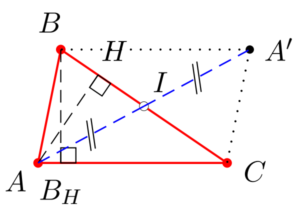
Proposition 3 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ABC **est rectangle en** A **;**

(ii) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ **;**

(iii) $BA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$**.**

***démonstration** :*



Montrons d'abord (i) ⇔ (ii). *Considérons le symétrique A' de A par rapport à I, et B_H le projeté orthogonal de B sur (AC). Puisque l'aire du parallélogramme $ABA'C$ vaut le double de celle du triangle ABC, il vient que*

$$BB_H \cdot AC = 2 \cdot \frac{AH \cdot BC}{2} = AH \cdot BC.$$

Par suite,

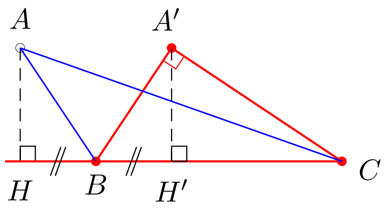
$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \Leftrightarrow BB_H = BA \Leftrightarrow A = \min_{\Omega \in (AC)} B\Omega \Leftrightarrow B_H = A \Leftrightarrow ABC \text{ rectangle en } A.$$

Montrons ensuite (i) ⇔ (iii). *On a :*

$$\begin{aligned} ABC \text{ rectangle en } A &\Leftrightarrow BAC \text{ et } BHA \text{ sont semblables} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow BA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

`Remarques 2` : * Dans cette proposition, les mesures algébriques sont importantes ! En effet, en supposant l'égalité (iii) vraie sans mesures algébriques, la figure ci-dessous permet de montrer qu'on a aussi $AB^2 = BH \cdot BC$ (car H a été construit de sorte que $BH = BH'$), mais le triangle ABC n'est en aucun cas rectangle en A.



* Pour conserver cet énoncé au niveau fin de collège, on peut démontrer l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) de la manière suivante, en utilisant à trois reprises le théorème de Pythagore : commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} & \overline{BH} - \overline{BC} = \overline{CH} \Rightarrow \left(\overline{BH} - \overline{BC}\right)^2 = \overline{CH}^2 \Leftrightarrow BH^2 + BC^2 - 2\,\overline{BH}\,\overline{BC} = CH^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \overline{BH}\,\overline{BC} = \frac{BH^2 + BC^2 - CH^2}{2} = \frac{(AB^2 - AH^2) + BC^2 - (AC^2 - AH^2)}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & \overline{BH}\,\overline{BC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, en utilisant l'égalité précédente :

$$ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow BC^2 - AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow \overline{BH}\,\overline{BC} = \frac{AB^2 + AB^2}{2} = AB^2.$$

Exercice : Montrer que l'on a aussi l'équivalence

$$ABC \text{ rectangle en } A \quad \Leftrightarrow \quad AH^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}.$$

<u>**Solution**</u> : On procède comme précédemment en trouvant deux triangles semblables : c'est le cas des triangles AHB et CHA. Pour que l'équivalence soit correcte, il faut préciser que B et C doivent être de part et d'autre du point H sur la droite (BC). Ainsi,

$$ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow AHB \text{ et } CHA \text{ semblables } \Leftrightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HA}} \Leftrightarrow AH^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC},$$

et le résultat est démontré. Il est laissé au lecteur le soin de trouver une démonstration n'utilisant pas les triangles semblables. $\diamond$

32.2 Relations trigonométriques

Proposition 4 : Soient ABC une triangle rectangle en A, et $A' \in [AB], B' \in [BC]$ tels que $(A'C') \parallel (AC)$. Alors on a les égalités suivantes :

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{AB}{A'B} = AC A'C'.$$

En particulier, on a aussi

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B}.$$

démonstration *: La double-égalité annocée découlent directement du théorème de Thalès dans les triangles BAC et $BA'C'$, après avoir vérifiée que les hypothèses s'appliquent, ce qui est le cas ! De plus, les trois autres égalités se déduisent de la première double-égalité.* ■

Définition 2 : Dans le triangle ABC rectangle en A, on définit :

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}.$$

Remarques 3 :

1. $\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1$. En effet, c'est une conséquence directe du théorème de Pythagore :

$$\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

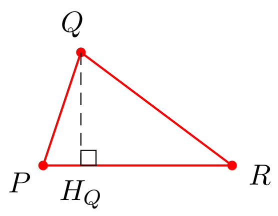
2. $\tan\widehat{B} = \sin\widehat{B} / \cos\widehat{B}$.
3. $0 \leqslant \cos\widehat{B} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \sin\widehat{B} \leqslant 1 \quad$ et $\quad 0 < \tan\widehat{B}$.

Cette définition va nous permettre de pouvoir donner une autre formule de l'aire d'un triangle quelconque, autre que celle donnée en pré-requis :

Théorème 2 : Soit PQR un triangle quelconque. Alors on a indifféremment :

$$\mathscr{A}(PQR) = \frac{1}{2} PQ \cdot PR \cdot \sin\widehat{P} = \frac{1}{2} QR \cdot QP \cdot \sin\widehat{Q} = \frac{1}{2} RP \cdot RQ \cdot \sin\widehat{R}.$$

démonstration *:*

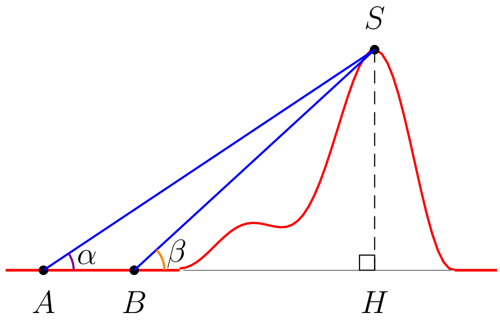


Soit H_Q le projeté orthogonal de Q sur (PR). Alors le triangle PH_QQ est rectangle en H_Q, de sorte que $\sin\widehat{P} = QH_Q/PQ$, soit $QH_Q = PQ\sin\widehat{P}$. Il s'en suit que

$$\mathscr{A}(PQR) = \frac{1}{2} PR \cdot QH_Q = \frac{1}{2} PR \cdot PQ \cdot \sin\widehat{P}.$$

Les deux autres égalités s'obtiennent par permutation circulaire des points P, Q et R. ■

Exercice (topographie) : Déterminer la hauteur d'une montagne en fonction de la distance AB et des angles α et β (les notations sont celles de la figure ci-dessous).



On a que $SH = AH\tan\alpha$ en utilisant la définition 2 dans le triangle rectangle AHS, et cette même définition appliquée au triangle rectangle BHS donne l'égalité $SH = BH\tan\beta$. Or $AH = AB + BH$ puisque les points A, B et H sont alignés dans cet ordre, et on en déduit que

$$\begin{aligned} & SH = \tan\alpha(AB + BH) = \tan\alpha\left(AB + \frac{SH}{\tan\beta}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & SH\left(1 - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right) = AB\tan\alpha \Leftrightarrow SH = \frac{\tan\beta\cdot\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\,AB. \end{aligned}$$

Par exemple (les longueurs sont exprimées en mètres et les mesures d'angles en degrés), pour $AB = 1000$, $\alpha = 50,235$ et $\beta = 58,031$, on trouve $SH = 4807$. De quelle montagne pourrait-il s'agir ? ? $\diamondsuit$