LEÇON N° 22 :

Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.

Pré-requis :
- *Déterminants ;*
- *Définition vectorielle d'une droite : $\mathscr{D}$ est une droite s'il existe un point A du plan $\mathscr{P}$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul tels que*
$$\mathscr{D} = \{M \in \mathscr{P} \ : \ \exists\, k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\} = \mathscr{D}(A, \vec{u}) \ ;$$
- *Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ sont colinéaires si et seulement si $\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc = 0$.*
  $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\mathscr{D}(A', \vec{u}')$ sont parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

On se place dans un plan affine $\mathscr{P}$, muni d'un repère cartésien $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

22.1 Équations cartésiennes d'une droite du plan

22.1.1 Définition

Théorème 1 :

(i) Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, tels que
$$M(x, y) \in \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0 \ ;$$

(ii) Réciproquement, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble $\{M \in \mathscr{P} \mid ax + by + c = 0\}$ est une droite de $\mathscr{P}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

***démonstration** :*

(i) Puisque $(a, b) \neq (0, 0)$, on peut trouver un point A qui soit dans $\mathscr{D}$, donc $\mathscr{D} \neq \varnothing$. Soit $A(x_0, y_0)$ ce point. On a alors $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$ avec $\vec{u}(\alpha, \beta) \neq \vec{0}$. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\overset{\text{P.R.}}{\Leftrightarrow} \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0. \end{aligned}$$

On pose alors $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$, de sorte que $M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

(ii) Posons $D = \{M \in \mathscr{P} \mid ax + by + c = 0\}$. Soient $A(x_0, y_0) \in D$ et $M(x, y) \in D$. Alors

$$\begin{aligned} ax + by + c = ax_0 + by_0 + c = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u}(-b, a) \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathscr{D}(A, \vec{u}). \end{aligned}$$

Donc $D = \mathscr{D}(A, \vec{u})$.

■

Définition 1 : L'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est appelée *équation cartésienne de $\mathscr{D}$*. On note alors $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$.

`Remarque 1` : On constate que

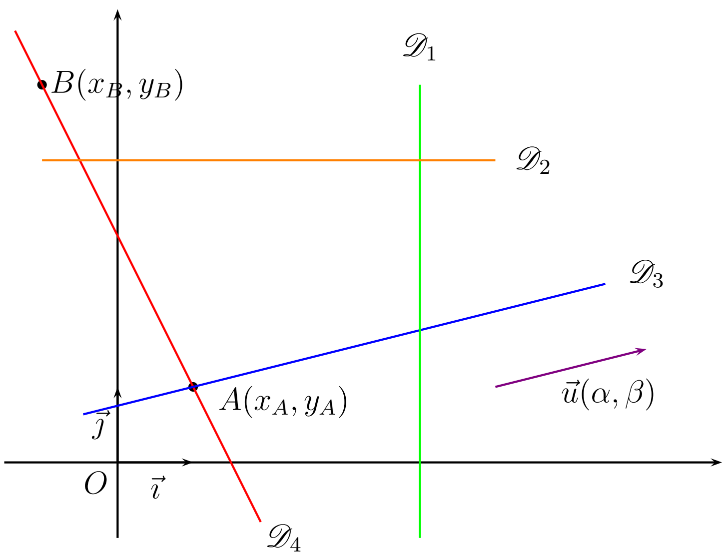
$$\mathscr{D}(A, \vec{u}) = \mathscr{D}(A', \vec{u'}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1. & \vec{u}, \vec{u'} \text{ colinéaires,} \\ 2. & \overrightarrow{AA'} \text{ colinéaire à } \vec{u}. \end{cases}$$

On en déduit que l'équation cartésienne n'est pas unique, mais déterminée à un coefficient multiplicatif près. En d'autres termes, si $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathscr{D}' : a'x + b'y + c' = 0$,

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}' \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \neq 0 \mid \lambda(a, b, c) + \mu(a', b', c') = 0.$$

22.1.2 Méthodes pour trouver une équation cartésienne

Voici une figure sur laquelle nous allons travailler pour déterminer chacune des équations cartésiennes des quatre droites :



On a alors (M est de coordonnées (x, y)) :
$\mathscr{D}_1 : M \in \mathscr{D}_1 \Leftrightarrow x = c$, $c \in \mathbb{R}$.
$\mathscr{D}_2 : M \in \mathscr{D}_2 \Leftrightarrow y = c$, $c \in \mathbb{R}$.
$\mathscr{D}_3 : M \in \mathscr{D}_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$.
$\mathscr{D}_4 : M \in \mathscr{D}_4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$.

22.2 Intersection et parallélisme

22.2.1 Cas de deux droites

Définition 2 : Deux droites $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\mathscr{D}'(A', \vec{u'})$ sont dites *parallèles* (resp. sécantes) si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont (resp. ne sont pas) colinéaires. On note alors $\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}'$.

Proposition 1 : Deux droites $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathscr{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles (resp. sécantes) si et seulement si $ab' - a'b = 0$ (resp. $\neq$).

démonstration : *D'après le théorème 1, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont respectivement dirigées par $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u'}(-b', a')$, et par définition, $\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$. De plus, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u'}$ non colinéaires $\Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$.* ■

`Remarque 2` : Dans le cas où $ab' - a'b = 0$, la remarque 1 permet d'affirmer que $ac' - a'c = 0 \Rightarrow \mathscr{D} = \mathscr{D}'$ et $ac' - a'c \neq 0 \Rightarrow \mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$ (on dit alors qu'elles sont *strictement parallèles*).

Corollaire 1 : Toute droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + \gamma = 0$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

démonstration : *Conséquence directe de la proposition 1.* ■

22.2.2 De plusieurs droites

Définition 3 : Le faisceau $\mathscr{F}_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'}$ engendré par deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ distinctes est
- ◇ **l'ensemble des droites passant par $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$, si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes,**
- ◇ **l'ensemble des droites parallèles à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.**

Proposition 2 : Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites distinctes. $\mathscr{F}_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'}$ est l'ensemble des droites du plan dont une équation cartésienne est combinaison linéaire de celles de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

démonstration : *Notons $f(x, y) = ax + by + c$, $f'(x, y) = a'x + b'y + c'$, de sorte que $\mathscr{D} : f(x, y) = 0$ et $\mathscr{D}' : f'(x, y) = 0$. Notons encore $\mathscr{D}_{\lambda,\mu} : \lambda f(x, y) + \mu f'(x, y) = 0$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

"$\Leftarrow$" : *Supposons que* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *soient sécantes en* $I(x_i,y_i)$. *Alors* $f(x_i,y_i)=0$ *et* $f'(x_i,y_i)=0$ *impliquent* $\lambda\, f(x_i,y_i)+\mu\, f'(x_i,y_i)=0$ *(*$\forall\,\lambda,\mu$*), donc* $I\in\mathscr{D}_{\lambda,\mu}$*, et* $\mathscr{D}_{\lambda,\mu}\in\mathscr{F}_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}$. *Supposons alors* $\mathscr{D}//\mathscr{D}'$. *Dans ce cas,*

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=0\\ f'(x,y)=0\end{array}\right. && \text{n'admet pas de solution}\\ \Rightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=0\\ \lambda\, f(x,y)+\mu\, f'(x,y)=0\end{array}\right. && \text{n'admet pas de solution}\\ \Rightarrow\ & D_{\lambda,\mu}\ //\ \mathscr{D}\Rightarrow\mathscr{D}_{\lambda,\mu}\in\mathscr{F}_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" : *Supposons que* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *soient sécantes en* $I(x_i,y_i)$. *Alors il existe* $M(x_M,y_M)$ *tel que* $M\notin\{\mathscr{D},\mathscr{D}'\}$*, et* $M\in\mathscr{D}''$ *où* $\mathscr{D}''$ *est une droite passant par* I. *En posant* $\lambda=f'(x_M,y_M)$ *et* $\mu=-f'(x_M,y_M)$*, la droite* $\mathscr{D}_{\lambda,\mu}:\lambda\, f(x,y)+\mu\, f'(x,y)=0$ *contient* I *et* M*, donc* $\mathscr{D}_{\lambda,\mu}=\mathscr{D}''$. *Supposons alors* $\mathscr{D}//\mathscr{D}'$*, et soit* $\mathscr{D}''$ *une droite distincte de* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *et parallèle à ces dernières, passant par le point* M. *En posant* $\lambda=f'(x_M,y_M)$ *et* $\mu=-f'(x_M,y_M)$*, la droite* $\mathscr{D}_{\lambda,\mu}:\lambda\, f(x,y)+\mu\, f'(x,y)=0$ *est parallèle à* $\mathscr{D}$ *(d'après la partie "*$\Leftarrow$*") et passe par* M*, donc* $\mathscr{D}_{\lambda,\mu}=\mathscr{D}''$.

■

22.3 Condition pour que trois droites soient concourantes

Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ trois droites d'équation cartésiennes respectives $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $a''x+b''y+c''=0$, notées aussi respectivement $f(x,y)=0$, $f'(x,y)=0$ et $f''(x,y)=0$.

Théorème 2 : On suppose $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en un point $I(x_i,y_i)$. Alors $\mathscr{D}''$ passe par I si et seulement si

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}=0.$$

démonstration *:*

"$\Rightarrow$" : $I\in\mathscr{D}''\Rightarrow\mathscr{D}''\in\mathscr{F}_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}\Leftrightarrow\exists\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\mid\mathscr{D}'':\lambda\, f(x,y)+\mu\, f'(x,y)=0$. *Or* $\mathscr{D}'':a''x+b''y+c''=0$*, donc il existe* $\eta\in\mathbb{R}$ *tel que* $\eta\, X''=\lambda X+\mu X'$ *(*$X\in\{a,b,c\}$*), donc la dernière ligne de* Δ *est combinaison linéaire des deux autres, d'où* $\Delta=0$.

"$\Leftarrow$" : $\Delta=0\Rightarrow$ *l'une des lignes de* Δ *(notée* L*) est combinaison linéaire des deux autres (notées* L' *et* L''*). Si* L' *et* L'' *sont dépendantes, elles sont proportionnelles, et les trois droites correspondantes sont confondues (en particulier,* $I\in\mathscr{D}''$*). Si* L' *et* L'' *sont indépendantes, alors les droites correspondantes ne sont pas confondues et engendrent donc un faisceau de droites dont fait partie la droite correspondant à* L *(car* $L=\lambda\, L'+\mu\, L''\Rightarrow f_L=\lambda\, f_{l'}+\mu\, f_{L''}$ *et proposition 2). Dans tous les cas,* $I\in\mathscr{D}$ *et* $I\in\mathscr{D}'\Rightarrow f(x_i,y_i)=f'(x_i,y_i)=0\Rightarrow f''(x_i,y_i)=0$ *(d'après la proposition précédente), donc* $I\in\mathscr{D}''$.

■

`Remarque 3` : Si l'on remplace $\Delta=0$ par $\exists\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}^*\mid f''=\lambda\, f+\mu\, f'$, la démonstration est alors évidente avec la proposition 2, ce qui nous évite d'avoir à parler de déterminant et donc de laisser la leçon à un niveau Terminale S.

22.4 Applications

Théorème 3 : Soient $\mathscr{D}$: $f(x, y) = 0$ et $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{P}$. Alors :

(i) $(AB) \,//\, \mathscr{D} \Leftrightarrow f(x_A, y_A) = f(x_B, y_B)$ **;**

(ii) $B \notin \mathscr{D}$ **et** $(AB) \cap \mathscr{D} = \{I\} \Rightarrow \dfrac{\overline{AI}}{\overline{BI}} = \dfrac{f(x_A, y_A)}{f(x_B, y_B)}$**.**

démonstration *: Notons* $(AB) : f'(x, y) = a'x + b'y + c' = 0$.

(i) $(AB) \,//\, \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{R} \mid f'(x, y) = f(x, y) + \gamma$ *(d'après le corollaire 1). Or* $A, B \in (AB)$ *donnent :*

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_A, y_A) = 0 \Rightarrow f(x_A, y_A) + \gamma = 0 \\ f'(x_B, y_B) = 0 \Rightarrow f(x_B, y_B) + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_A, y_A) = f(x_B, y_B),$$

d'où le résultat.

(ii) Posons $\vec{f} : \vec{u}(x, y) \longmapsto ax + by$*.* $\vec{f}$ *est clairement linéaire, et l'on vérifie sur les équations que* $\vec{f}(\overrightarrow{NM}) = f(M) - f(N)$ *(où* $f(M)$ *désigne* $f(x_M, y_M)$ *pour tout point* $M \in \mathscr{P}$*).* $A, B \notin I$*, et ces trois points sont alignés, donc il existe* $k \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$ *(en particulier* $k = \overline{IA}/\overline{IB}$*). Alors*

$$f(A) = f(A) - \underbrace{f(I)}_{=0\ (I \in \mathscr{D})} = \vec{f}(\overrightarrow{IA}) = \vec{f}(k\overrightarrow{IB}) = k\,\vec{f}(\overrightarrow{IB}) = k\big(f(B) - f(I)\big) = k\,f(B).$$

D'où le résultat :

$$k = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}} = \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f(x_A, y_A)}{f(x_B, y_B)}.$$

■

Corollaire (Théorème de Ménélaüs) : Soient ABC un triangle, $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$ et $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1. \qquad (\bigstar)$$

démonstration *: Soient* $f(x, y) = 0$ *une équation de* (PQ) *et* $f(A) = f(x_A, y_A)$ *une notation. Alors*

$$(PQ) \cap (AB) = \{R\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{f(A)}{f(B)}$$

par le théorème précédent. De même, on montre que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{f(B)}{f(C)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{f(C)}{f(A)}.$$

D'où le résultat. Réciproquement, les droites (AB) *et* (PQ) *sont sécantes (en effet, si elles étaient parallèles, on aurait* $\overline{QC}/\overline{QA} = \overline{PC}/\overline{PB}$ *d'après Thalès, donc* $\overline{RA}/\overline{RB} = 1$ *par* $(\bigstar)$*, ce qui est impossible) en un point noté* R'*. Le sens direct nous assure alors que* R' *vérifie* $(\bigstar)$ *avec* P *et* Q*, d'où*

$$\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}},$$

c'est-à-dire $R = R'$ *(car* $A \neq B$*).* ■

Corollaire (théorème de Céva) : Soient ABC un triangle, $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$ et $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Alors (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1. \qquad (\bigstar)$$

***démonstration** : Si K est le point de concours, il suffit d'appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle APB avec la sécante (CR) puis à APC avec (BQ). Si elles sont parallèles, il suffit d'utiliser le théorème de Thalès. Réciproquement, la démonstration est analogue à la précédente : on montre par l'absurde que (CK) et (AB), avec $\{K\} = (AP) \cap (BQ)$, sont sécantes en un point R', puis que $R' = R$.* ■