LEÇON N° 17 :

Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

Pré-requis :
- *Fonctions trigonométriques et applications, notions sur les lignes de niveaux ;*
- *Construction du corps* $\mathbb{C}$ *(*$\Re\mathrm{e}$*,* $\Im\mathrm{m}$*, conjugaison, ...) ;*
- *Théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle au centre.*

17.1 Module d'un nombre complexe

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, $\overline{z}$ son conjugué. Alors on constate que $z\,\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$ est un nombre réel positif, nous permettant de donner la définition suivante :

Définition 1 : On appelle *module de z* le réel positif $\sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$. On le note $|z|$.

Remarque 1 : Si $b = 0$, alors $|z| = |a| = \sqrt{a^2}$. La notation est ainsi justifiée par extension de la notation "valeur absolue".

Proposition 1 :

1. $|z| \geqslant 0$ et $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$;
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$;
3. $|\Re\mathrm{e}(z)| \leqslant |z|$ (resp. $|\Im\mathrm{m}(z)| \leqslant |z|$) avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in i\mathbb{R}$) ;
4. $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|$.[a] En particulier,
$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda z| = |\lambda|\,|z|. \quad (\bigstar)$$
Il en résulte que si $z_2 \neq 0$, on a $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, et donc $(z \neq 0)$ $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
5. $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$, avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $z_1 = kz_2$, $k \in \mathbb{R}^+$ (géométriquement, c'est une propriété de la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$) ;
6. $\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1+z_2|$.

[a] : On remarquera que l'application $(\mathbb{C},\times) \longrightarrow (\mathbb{R},\cdot)$: $z \longmapsto |z|$, où $\times$ (resp. $\cdot$) représente la multiplication dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$), est un morphisme de groupes.

démonstration :

1. *C'est la définition.*
2. *On a* $|-z| = \sqrt{(-z)\,\overline{(-z)}} = \sqrt{(-z)\,(-\overline{z})} = \sqrt{z\,\overline{z}} = |z|$ *et* $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}\,z} = |z|$.
3. *On a* $|z| = \sqrt{\Re\mathrm{e}^2(z) + \Im\mathrm{m}^2(z)} \leqslant \sqrt{\Re\mathrm{e}^2(z)} = \Re\mathrm{e}(z)$. *L'égalité n'a lieu que lorsque* $\Im\mathrm{m}^2(z) = 0 \Leftrightarrow \Im\mathrm{m}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. *De même,* $|z| = \sqrt{\Re\mathrm{e}^2(z) + \Im\mathrm{m}^2(z)} \leqslant \sqrt{\Im\mathrm{m}^2(z)} = \Im\mathrm{m}(z)$. *L'égalité n'a lieu que lorsque* $\Re\mathrm{e}^2(z) = 0 \Leftrightarrow \Re\mathrm{e}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
4. ◇ $|z_1\, z_2| = \sqrt{z_1 z_2\, \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}\, z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1\,\overline{z_1}}\,\sqrt{z_2\,\overline{z_2}} = |z_1|\,|z_2|$.
   ◇ *On choisit* $z_1 = \lambda \in \mathbb{R}$, *et le résultat en découle.*
   ◇ *Démonstration analogue, puis* $z_1 = 1$.
5. *On a*

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1\,\overline{z_2} + \overline{z_1}\,z_2 + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\,\overline{z_2} + \overline{z_1\,\overline{z_2}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\Re\mathrm{e}(z_1\,\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
&\overset{3.}{\leqslant} |z_1|^2 + 2|z_1\,\overline{z_2}| + |z_2|^2 \overset{4.2.}{=} |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 \quad \overset{|\cdot|\geqslant 0}{\Longrightarrow} \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.
\end{aligned}$$

Si $z_1 = 0$ *ou* $z_2 = 0$, *l'égalité est immédiate. Sinon*

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad &\Leftrightarrow \quad \Re\mathrm{e}(z_1\,\overline{z_2}) = |z_1\,\overline{z_2}| \overset{3.}{\Leftrightarrow} z_1\,\overline{z_2} \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{a}{\overline{z_2}} = \frac{a\,z_2}{z_2 \overline{z_2}} = k z_2,\ \text{où } k = \frac{a}{|z_2|^2} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

6. *Résulte de 5. En effet,* $z_1 = z_1 + z_2 - z_2 \Rightarrow |z_1| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$. *De même,* $z_2 = z_2 + z_1 - z_1 \Rightarrow |z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2|$. *On en déduit le résultat attendu.* ■

`Remarques 2 :`

◇ 1, ★ et 5 traduisent que le module est une norme ;
◇ 4 donne le théorème suivant :

Théorème 1 : L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif noté U, sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}, \times)$. C'est le noyau du morphisme $z \longmapsto |z|$ de $(\mathbb{C}, \times)$ dans le sous-groupe multiplicatif $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Conséquences :

i. Dans le plan $\mathscr{P}$, l'image de U est le cercle trigonométrique (centre O, rayon 1) ;
ii. $1, i, -1, -i$ sont des éléments remarquables de U.

17.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ d'image M dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Alors $z/|z| \in U$ et son image M' d'affixe $z/|z|$ est donc sur le cercle trigonométrique. Si θ est une mesure modulo 2π de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$, on a ainsi $z/|z| = \cos\theta + i\sin\theta$, avec

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Définition 2 : θ est appelé *argument de z* et est noté $\arg(z)$. La valeur de θ appartenant à $]-\pi, \pi]$ est appelé *argument principal de z*, noté $\operatorname{Arg}(z)$.

`Remarque 3` : 0 n'a pas d'argument.

17.2.1 Forme trigonométrique

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ est d'argument θ, alors z s'écrit sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Réciproquement, si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho > 0$, alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta$.

Définition 3 : Une telle écriture, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z.

17.2.2 Propriétés

Proposition 2 :

1. **Si $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg(k) = 0 \pmod{2\pi}$. Si $k \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(k) = \pi \pmod{2\pi}$;**
2. **$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$;**
3. **$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$;**
4. **Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1\, z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$. En particulier,**
   - **$\diamond$ $\arg(z^n) = n\, \arg(z) \pmod{2\pi} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, z \in \mathbb{C})$,**
   - **$\diamond$ $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C})$,**
   - **$\diamond$ $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi} \quad (\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C})$.**

démonstration : *Dans cette démonstration, nous supposerons z écrit sous sa forme trigonométrique :* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

1. $\diamond$ $k \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow k = a > 0 \Leftrightarrow k = |a|(1 + 0i) \Leftrightarrow k = |k|(\cos 0 + i\sin 0) \Leftrightarrow \arg(k) = 0 \pmod{2\pi}$,
   $\diamond$ $k \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow k = a < 0 \Leftrightarrow k = |a|(-1 + 0i) \Leftrightarrow k = |k|(\cos\pi + i\sin\pi) \Leftrightarrow \arg(k) = \pi \pmod{2\pi}$.
2. $-z = |z|(-\cos\theta - i\sin\theta) = |z|\big(\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)\big) \Rightarrow \arg(-z) = \pi + \theta \pmod{2\pi} = \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$.
3. $\overline{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big) \Rightarrow \arg(\overline{z}) = -\theta \pmod{2\pi} = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
4. $\diamond$ *On a*

$$\begin{aligned}
z_1\, z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= |z_1\, z_2|\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\big) \\
&= |z_1\, z_2|\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big) \\
\Rightarrow \arg(z_1\, z_2) &= \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi} = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$

   $\diamond$ *récurrence.*
   $\diamond$ $z_1/z_2 = \cdots$ *(démonstration analogue), puis* $z_1 = 1$. ■

Proposition 3 (Formule de Moivre) : Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

démonstration : *Posons* $z = \cos\theta + i\sin\theta$. *Alors* $|z| = 1 \Rightarrow \arg(z) = \theta$ *et on a aussi* $|z^n| = |z|^n = 1$. *Alors* $\arg(z^n) \overset{3.}{=} n\arg(z) \pmod{2\pi} = n\theta \pmod{2\pi}$, *d'où* $z^n = |z^n|\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. ■

17.2.3 Notation exponentielle

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longmapsto & U \subset \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta + i\sin\theta. \end{array}$$

φ vérifie alors :

▷ $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $|\varphi(\theta)| = 1$, donc $\varphi(\theta) \neq 0$;

▷ $\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \varphi(\theta_1)\,\varphi(\theta_2)$ (d'où en particulier $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(-\theta) = 1/\varphi(\theta)$) ;

▷ $\varphi'(\theta) = i\varphi(\theta)$.

Ces propriétés rappellent celles de la fonction exponentielle ($x \longmapsto e^{\lambda x}$ est l'unique fonction y sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y \not\equiv 0$, $y' = \lambda\, y$ et $y(0) = 1$), et conduisent naturellement à poser par convention $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Proposition 4 :

1. **Formules d'Euler :** $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ **et** $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ **;**
2. **Formule de Moivre en écriture exponentielle :** $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ **;**
3. $e^{i\theta} + 1 = 0$.

démonstration :

1. *On a*
$$\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) = \cos\theta.$$
De même, on trouve que
$$\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta) = \sin\theta.$$
2. *C'est la formule de Moivre...*
3. $e^{i\pi} + 1 = \cos\pi + i\sin\pi + 1 = 0$. ■

Définition 4 : Si $z \in \mathbb{C}^*$, de module ρ et d'argument θ, s'écrit $z = \rho\, e^{i\theta}$, alors cette écriture est appelée *écriture exponentielle* de z.

`Remarque 4` : $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(U, \times)$, même un isomorphisme de groupes de $\big(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), +\big)$ sur $(U, \times)$.

17.3 Interprétation géométrique

Soient $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un répère orthonormé du plan complexe, $M(z)$, $M'(z')$ deux points d'affixes z et z'.

17.3.1 Module

Proposition 5 : $d(M, M') = |z' - z|$.

démonstration : *On a* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z$. *On en déduit donc que* $\|\overrightarrow{MM'}\| = d(M, M') = |z' - z|$. ■

Exercice : Calculer $|z + z'|^2 + |z - z'|^2$ et interpréter le résultat géométriquement dans un parallélogramme. En déduire la formule de la médiane.

17.3.2 Argument

Proposition 6 : $\arg(z' - z) = (\vec{u}, \overrightarrow{MM'}) \pmod{2\pi}$.

démonstration : $\arg(z' - z) = \arg(z_{\overrightarrow{MM'}})$. *Il suffit donc de placer l'origine du vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *en* O *et d'appliquer la définition.* ■

Corollaire : Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ quatre points avec $a \neq b$. Alors

$$\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi}.$$

démonstration : *On a*

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) &= \arg(d - c) - \arg(b - a) \pmod{2\pi} \\
&= (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi} \\
&= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

17.4 Lignes de niveaux

Définition 5 : Soient $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. On appelle *ligne de niveau k associé à f* l'ensemble des points $M(z) \in \mathscr{P}$ tels que $f(z) = k$. On notera cet ensemble $L_k(k)$.

Voici quatre figures qui correspondront aux quatre propositions ci-dessous :

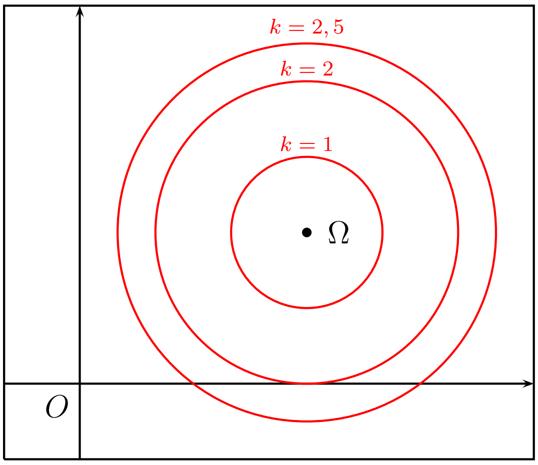

Figure 1 : $f(z)=|z-\omega|$

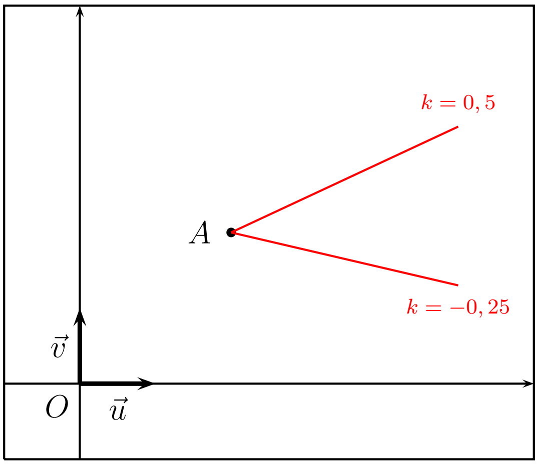

Figure 2 : $f(z)=\arg(z-a)$

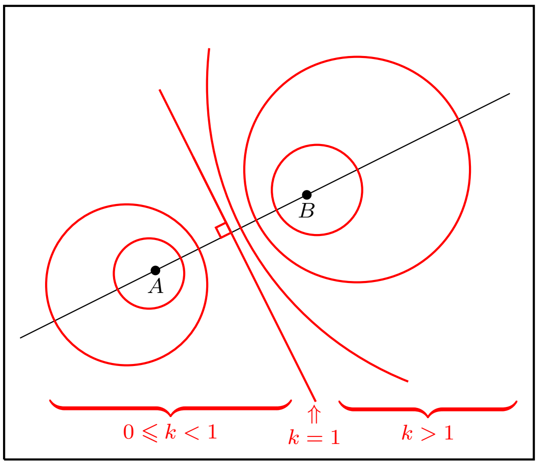

Figure 3 : $f(z)=\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$

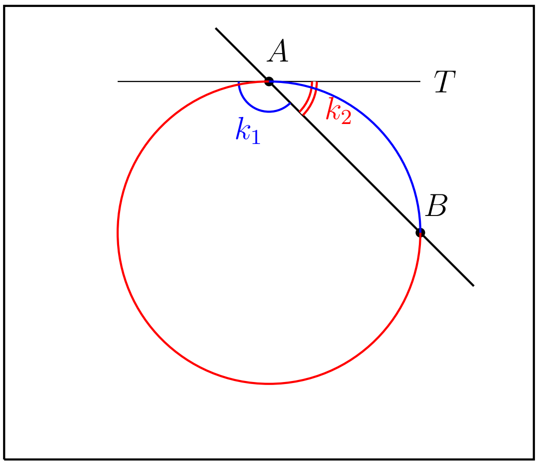

Figure 4 : $f(z)=\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

Proposition 7 (figure 1) : Soit $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(z)=|z-\omega|$ pour tout point $\Omega(\omega)\in\mathscr{P}$. Alors

$$L_f(k)=\begin{cases}\varnothing & \text{si } k<0\\ \{\Omega\} & \text{si } k=0\\ \mathscr{C}(\Omega,k) & \text{si } k>0.\end{cases}$$

démonstration : *Si $k<0$, le résultat est évident. Supposons alors $k=0$. Alors $L_f(0)=\{M(z)\in\mathscr{P}\mid |z-\omega|=0\}=\{M(z)\in\mathscr{P}\mid z=\omega\}=\{\Omega\}$. Enfin, si $k>0$, alors $|z-\omega=k\Leftrightarrow \Omega M=k\Leftrightarrow M\in\mathscr{C}(\Omega,k)$.* ■

Proposition 8 (figure 2) : Soit $f : \mathscr{P}\backslash\{A\} \longrightarrow \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ la fonction définie par $f(z) = \arg(z-a)$, pour tout $A(a) \in \mathscr{P}$. Alors

$$L_f(k) = \Delta_A^+,$$

où Δ_A^+ désigne la demi-droite d'éxtrémité A (privée de A) admettant pour vecteur directeur le vecteur unitaire $\vec{\alpha}$ tel que $(\vec{u}, \vec{\alpha}) = k \pmod{2\pi}$.

démonstration *: On a :*

$$\begin{aligned} L_f(k) &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid \arg(z-a) = k\} \\ &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k\} \qquad \textit{par la proposition 5} \\ &= \Delta_A^+, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 9 (figure 3) : Soit $f : \mathscr{P}\backslash\{B\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(z) = \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|$ pour tous points $A(a), B(b) \in \mathscr{P}$ tels que $a \neq b$. Alors

$$L_f(k) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad k < 0 \\ \{A\} & \text{si} \quad k = 0 \\ \text{méd}([AB]) & \text{si} \quad k = 1 \\ \mathscr{C}_{[IJ]} & \text{si} \quad k \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}, \end{cases}$$

où méd$([AB])$ désigne la médiatrice de $[AB]$, $\mathscr{C}_{[IJ]}$ le cercle de diamètre $[IJ]$, avec $I = \text{bar}\{(A,1),(B,-k)\}$ et $J = \text{bar}\{(A,1),(B,k)\}$.

démonstration *: Les cas $k<0$, $k=0$ et $k=1$ sont triviaux. Supposons alors $k \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. Alors*

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-a}{z-b}\right| &= k \Leftrightarrow = \frac{|z-a|}{|z-b|} = k \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = k \Leftrightarrow k^2\,BM^2 - AM^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (k\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM})(k\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}\,(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-k^2)\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0, \end{aligned}$$

donc M est sur le cercle de diamètre $[IJ]$. ■

Proposition 10 (figure 4) : Soit $f : \mathscr{P}\backslash\{B\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ la fonction définie par $f(z) = \arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ pour tous points $A(a), B(b) \in \mathscr{P}$ tels que $a \neq b$. Alors

$$L_f(k) = \begin{cases} (AB)\backslash[AB] & \text{si} \quad k = 0 \pmod{2\pi} \\ ]AB[& \text{si} \quad k = \pi \pmod{2\pi} \\ \mathscr{A}_{A,B}^T & \text{si} \quad k \neq 0 \pmod{\pi}, \end{cases}$$

où $\mathscr{A}_{A,B}^T$ désigne l'un des deux arcs ouverts d'extrémités A et B du cercle $\mathscr{C}$ passant par ces deux points et admettant pour tangente en A la droite T telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = k \pmod{\pi}$.

***démonstration** : Les cas $k = 0 \pmod{2\pi}$ et $k = \pi \pmod{2\pi}$ sont évidents. Supposons alors $k \neq 0 \pmod{\pi}$. On rappelle que :*

Théorème de l'angle au centre ($\bigstar$) : *Pour tous points A, B, C d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, on a $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$.*

Théorème de l'angle inscrit ($\blacktriangle$) : *Pour tous points A, B d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et T un point de la tangente à $\mathscr{C}$ en A, on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) \pmod{\pi}$.*

Alors

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k \overset{\text{coro}}{\Leftrightarrow} (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = k \overset{(\bigstar)\to(\blacktriangle)}{=} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}).$$

Par les deux résultats précédents, M est sur le cercle passant par A et B, privé de A et B (sinon on aurait $k = 0$) et tel que sa tangente T en A vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) = k$. ■

17.5 Applications

1. $\mathscr{C}(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |z - \omega| = r\}$, où $\Omega(\omega) \in \mathscr{P}$ et $r \geqslant 0$.
2. Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points de $\mathscr{P}$. Alors

$$\begin{aligned} (AB) &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid z = a \text{ ou } \arg(z-a) = \arg(b-a) \pmod{2\pi}\} \\ &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid z = a \text{ ou } \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{M(z) \in \mathscr{P} \mid z = a \text{ ou } (z-a)\,\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

3. méd$([AB]) = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |z-a| = |z-b|\}$.
4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ d'affixes respectives z et z'. Alors
   ◇ $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u'} = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow z'/z \in \mathbb{R}^*$;
   ◇ $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u'} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow z'/z \in i\mathbb{R}^*$.
   Il en découle que si $A(a), B(b), C(c)$ sont trois points de $\mathscr{P}$, alors

$$A, B, C \text{ alignés } \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad (AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*.$$

5. Cocyclicité de quatre points

Proposition 11 : $A(a), B(b), C(c), D(d)$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}^*.$$

***démonstration** : On a*

$$\begin{aligned} A, B, C, D \textit{ cocycliques ou alignés} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d}\right) = 0 \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■