Première partie

CERCLES ENCERCLÉS…

Énoncé du problème :

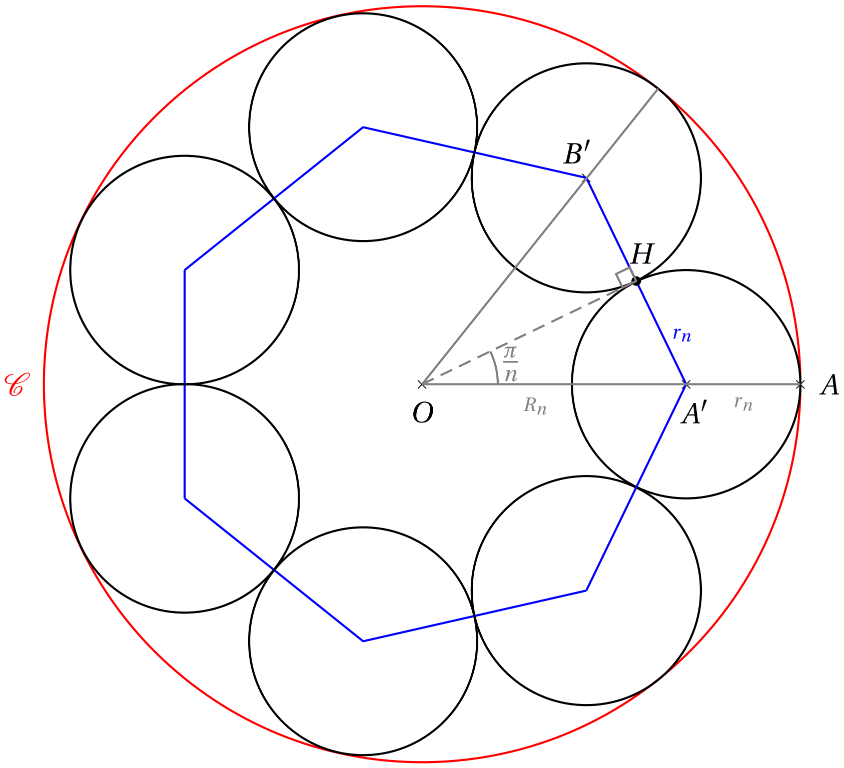
Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1, et $n \geqslant 1$ un entier naturel. On souhaite construire n cercles de même rayon noté r_n tels que :

(i) Les n cercles soient construits à l'intérieur de $\mathscr{C}$ et tangents à celui-ci ;

(ii) Chaque cercle doit être également tangent à ses deux voisins.

On demande d'exprimer r_n en fonction du nombre n de cercles à construire, puis de déterminer la limite du nombre nr_n lorsque n tend vers l'infini.

Faisons une figure illustrant ce cas (on a choisit $n = 7$ pour cette illustration) :



On a choisit ici d'introduire une autre quantité : R_n, égale à $1 - r_n$. Si l'on suppose la construction réalisée telle qu'elle est décrite ci-dessus, alors le polygone formé des centres des n cercles est nécessairement régulier (en effet, les cercles ont tous le même rayon et sont tangents à leurs voisins). Notons A' et B' les centres respectifs de deux cercles voisins parmi les n cercles, ainsi que A le point d'intersection de l'un des cercles avec $\mathscr{C}$. Notons encore H le milieu de $[A'B']$ (qui est aussi l'unique point d'intersection de ces deux cercles voisins).

On en déduit déjà que

$$\widehat{A'OB'} = \frac{2\pi}{n} \qquad \text{et} \quad \widehat{A'OH} = \frac{\pi}{n}.$$

En remarquant que la droite (OH) est perpendiculaire à $(A'B')$ en tant que tangente à ces deux cercles, on peut appliquer les formules de trigonométrie dans le triangle $OA'H$ afin de déterminer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{OH}{R_n} \quad \Leftrightarrow \quad OH = R_n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

On peut alors exprimer $R_n = OA'$ en fonction de $r_n = A'H$ en utilisant le théorème de Pythagore dans ce même triangle :

$$r_n = \sqrt{R_n^2 - R_n^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \sqrt{R_n^2\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = R_n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \Leftrightarrow \overset{n\geqslant 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\neq 0}{\Longrightarrow} \Leftrightarrow R_n = \frac{r_n}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

$$\begin{aligned} r_n = 1 - R_n = 1 - \frac{r_n}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_n\left(\sin\frac{\pi}{n}+1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad r_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Il s’en suit, en utilisant un développement limité du sinus en 0 à l’ordre 3, que

$$nr_n = \frac{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi - \overbrace{\frac{\pi^3}{6n^2} + o\left(\frac{\pi^3}{n^2}\right)}^{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}}{\underbrace{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}},$$

impliquant finalement que

$$\lim_{n\to\infty} nr_n = \pi.$$

Deuxième partie

CERCLES DÉCERCLÉS…

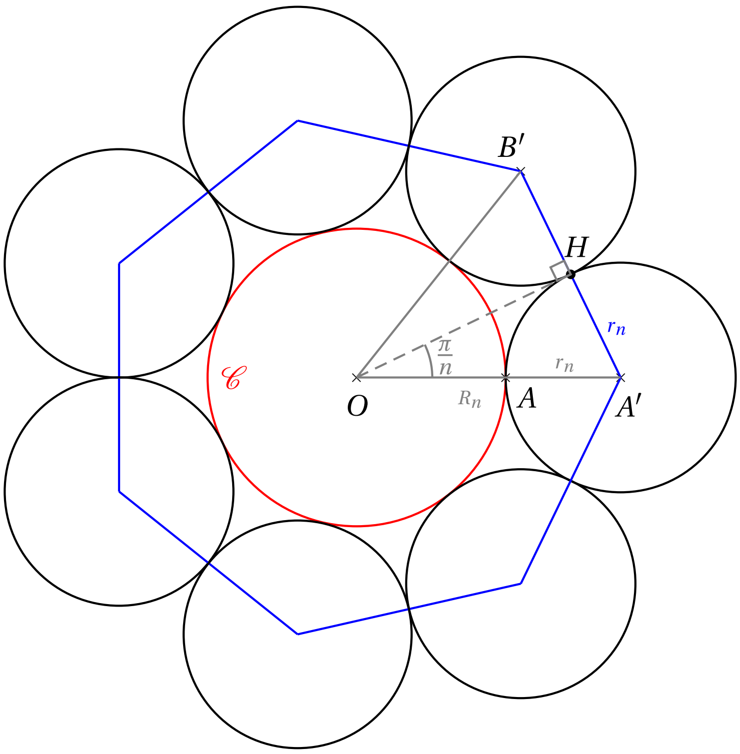
Énoncé du problème :
Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1, et $n \geqslant 1$ un entier naturel. On souhaite construire n cercles de même rayon noté r_n tels que :

(i) Les n cercles soient construits à <u>l'extérieur</u> de $\mathscr{C}$ et tangents à celui-ci ;

(ii) Chaque cercle doit être également tangent à ses deux voisins.

On demande d'exprimer r_n en fonction du nombre n de cercles à construire, puis de déterminer la limite du nombre nr_n lorsque n tend vers l'infini.

Faisons une figure illustrant ce cas (on a choisit $n = 7$ pour cette illustration) :



On a choisit ici d'introduire une autre quantité : R_n, égale à $1 + r_n$. Si l'on suppose la construction réalisée telle qu'elle est décrite ci-dessus, alors le polygone formé des centres des n cercles est nécessairement régulier (en effet, les cercles ont tous le même rayon et sont tangents à leurs voisins). Notons A' et B' les centres respectifs de deux cercles voisins parmi les n cercles, ainsi que A le point d'intersection de l'un des cercles avec $\mathscr{C}$. Notons encore H le milieu de $[A'B']$ (qui est aussi l'unique point d'intersection de ces deux cercles voisins).

On en déduit déjà que

$$\widehat{A'OB'} = \frac{2\pi}{n} \qquad \text{et} \quad \widehat{A'OH} = \frac{\pi}{n}.$$

En remarquant que la droite (OH) est perpendiculaire à $(A'B')$ en tant que tangente à ces deux cercles, on peut appliquer les formules de trigonométrie dans le triangle $OA'H$ afin de déterminer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{OH}{R_n} \quad \Leftrightarrow \quad OH = R_n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

On peut alors exprimer $R_n = OA'$ en fonction de $r_n = A'H$ en utilisant le théorème de Pythagore dans ce même triangle :

$$r_n = \sqrt{R_n^2 - R_n^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \sqrt{R_n^2\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = R_n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \Leftrightarrow \overset{n\geqslant 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\neq 0}{\Longrightarrow} \Leftrightarrow R_n = \frac{r_n}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

$$\begin{aligned} r_n = R_n - 1 = \frac{r_n}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{r_n\left(\sin\dfrac{\pi}{n} - 1\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad r_n = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Il s'en suit, en utilisant un développement limité du sinus en 0 à l'ordre 3, que

$$n r_n = \frac{n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = \frac{n\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^3 + o\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^3\right)}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi - \overbrace{\dfrac{\pi^3}{6n^2} + o\left(\dfrac{\pi^3}{n^2}\right)}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}}{\underbrace{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}},$$

impliquant finalement que

$$\lim_{n\to\infty} n r_n = \pi.$$