Des courbes bien particulières…

1 Courbes de Lorenz

Énoncé : Trouver (explicitement) une fonction f_n dont la courbe soit de Lorenz et présentant $n \in \mathbb{N}^*$ « vaguelettes ».

Rappelons tout d'abord la définition d'une *courbe de Lorenz* :

On dit que la représentation graphique d'une fonction f est une *courbe de Lorenz* si f vérifie les quatre conditions suivantes :

(i) f est définie sur $[0,1]$;

(ii) $f(0)=0$ et $f(1)=1$;

(iii) f est strictement croissante sur $[0,1]$;

(iv) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \leqslant x$.

Comme le terme de « vaguelette » n'a aucun sens mathématique et se prête donc à toute sorte d'interprétations inopportunes, il convient de l'expliciter pour donner à cette recherche un cadre plus rigoureux :

Supposons que la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[0,1]$ admette $n+1$ maximums locaux $m_1,\dots,m_{n+1}$ atteints respectivement en $x_1,\dots,x_{n+1}$ (distincts). On appelle alors *vaguelette* la portion de courbe représentant f sur un intervalle de type $[x_i, x_{i+1}]$, avec $i \in [\![1,n]\!]$.

`Remarques` préliminaires :

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $m_i \geqslant 0$ car f_n est strictement croissante sur $[0,1]$;
2. La « largeur » des vaguelettes (c'est-à-dire l'amplitude des intervalles de type $[x_i, x_{i+1}]$) n'est pas nécessairement la même d'une vaguelette à l'autre ;
3. Cette définition n'est valable que dans le cadre d'une fontion dérivable et dont la dérivée f_n' admette des maximums locaux. Pourtant, une fonction non dérivable pourrait fort bien avoir une courbe représentative qui soit de Lorenz et dont la forme rappellerait celle de vagues. Il suffirait par exemple de considérer une bête fonction affine par morceaux en choisissant judicieusement les coefficients directeurs. Comme ce cas trivial présente moins d'intérêt, on peut décider (sans diminuer grandement l'intérêt du problème !) de ne considérer que des fonctions dérivables sur $[0,1]$ (et qui sont, par ailleurs, plus difficiles à expliciter) et dont la dérivée admette des maximums locaux.

2 Solution constructive...

Une première idée consisterait à utiliser la 2π-périodicité de la fonction cosinus pour obtenir des maximums locaux pour la dérivée (en prenant soin de réduire la période par changement de variable pour en avoir $n+1$).

Une seconde idée serait alors de définir une fonction dont la courbe représentative admette la première bissectrice (i.e. la droite d'équation $y = x$) pour tangente en plusieurs points.

La fonction serait alors de type

$$f_n : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto ax + b + \dfrac{1}{c}\cos(cx). \end{array}$$

où a, b et $c \neq 0$ sont des constantes réelles. Le c sert à réduire la période et le $\frac{1}{c}$ fait en sorte que $f_n'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Il va de soi que c est un multiple de 2π puisque la fréquence doit être entière.

Pousuivons alors nos investigations ! On a

$$f_n(0) = b + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{c} \qquad \text{et} \qquad f_n(1) = a + b + \frac{1}{c} = a = 1.$$

A partir de ce point x désigne un réel compris entre 0 et 1. On obtient alors

$$f_n(x) = x + \frac{\cos(cx) - 1}{c}.$$

Puisque $c \neq 0$, f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables, et on a que

$$f_n'(x) = 1 - \sin(cx) \geqslant 0,$$

et de plus, f_n' ne s'annule sur $[0,1]$ qu'en un nombre fini de valeurs, on en déduit donc que f_n est strictement croissante sur cet intervalle.

Enfin, on remarque que si $c > 0$, alors

$$f_n(x) - x = \frac{\cos(cx) - 1}{c} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \leqslant x,$$

de sorte que la courbe représentant f_n soit bien de Lorenz, et ce, quelle que soit la valeur strictement positive que l'on choisit pour c.

3 Pourquoi cosinus ? ?

Si l'on avait voulu choisir la fonction sinus à la place de cosinus, on aurait obtenu $b = 0$ et $a = 0$, c'est-à-dire $f_n(x) = \frac{\sin(cx)}{c}$. On a alors $f_n'(x) = \cos(cx)$. Or on sait que cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, et en conséquence, f_n est strictement décroissante sur $[0, \pi/c] \subset [0,1]$. La condition f_n strictement sur $[0,1]$ n'est donc pas vérifiée, de sorte que la courbe représentant f_n ne soit pas de Lorenz.

4 Détermination de c

Avec la définition d'une vaguelette donnée précédemment, l'équation $f_n'(x) = 2$ (puisque 2 est la valeur maximale prise par f_n') doit admettre $n+1$ solutions pour qu'il y ait n vaguelettes. Notons encore que comme c est un multiple positif de 2π, on peut l'écrire sous la forme $c = 2p\pi$ où $p \in \mathbb{N}_+^*$. Par suite

$$\begin{aligned} f_n'(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(cx) = -1 \Leftrightarrow \sin(2p\pi) = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2p\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4p} + \frac{k}{p} = \frac{3+4k}{4p}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En ne retenant que les solutions de $]0,1[$, on obtient l'ensemble-solution S suivant :

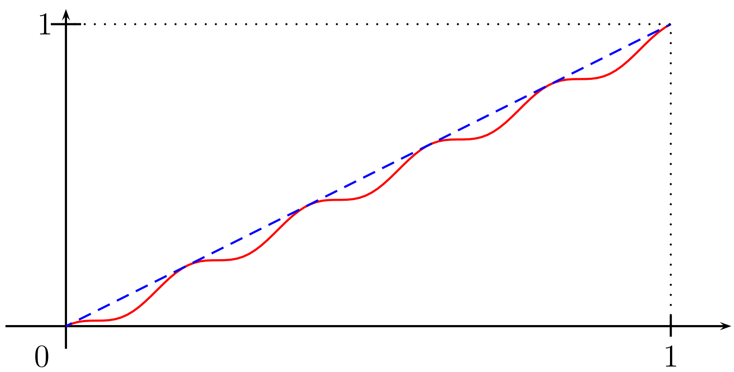
$$S = \left\{ \frac{3}{4p}, \frac{3+4}{4p}, \dots, \frac{3+4(p-1)}{4p} \right\}.$$

Enfin, on remarquera que $\mathrm{card}(S) = p$, et qu'on doit avoir $n+1$ solutions, d'où $p = n+1$, et finalement,

$$f_n(x) = x + \frac{\cos\big(2(n+1)\pi\, x\big) - 1}{2(n+1)\pi}.$$

5 Représentation graphique

On va représenter la fonction f_4 telle qu'elle a été définie ci-dessus :



`Remarque` : On pourrait utiliser une autre définition pour le terme « vaguelette », qui ne changerait rien au problème posé mais qui englobe tout l'intervalle $[0,1]$, et non pas l'intervalle $[x_1, x_{n+1}]$ (inclus, mais différent de $[0,1]$) :

Supposons que la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[0,1]$ admette $n+1$ maximums locaux $m_1, \dots, m_{n+1}$ atteints respectivement en $x_1, \dots, x_{n+1}$ (tels que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i < x_{i+1}$). On redéfinit alors $x_1 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. On appelle alors *vaguelette* la portion de courbe représentant f sur un intervalle de type $[x_i, x_{i+1}]$, avec $i \in [\![1,n]\!]$.