CONIQUES

On notera $B = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $B'(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $B''(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ trois repères orthonormés.

On se donne $f(x, y) = Q(x, y) + L(x, y) + k$, où $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ est la partie *quadratique* de f, $L(x, y) = dx + ey$ est la partie *linéaire* de f et a, b, c, d, e, k sont des constantes réelles, dans la base B. On pose alors

$$M_Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M_L = (d \quad e) \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R}).$$

Calcul des valeurs propres α *et* β *de* M_Q
(*on suppose que* $\alpha \leqslant \beta$)

$\alpha\,\beta < 0$	$\alpha\,\beta > 0$	$\alpha\,\beta = 0$
HYPERBOLE	**ELLIPSE**	**PARABOLE**

HYPERBOLE et ELLIPSE

Détermination du centre Ω

Le centre Ω admet pour coordonnées :

$$\boxed{\Omega = -\frac{1}{2} M_L\, M_Q^{-1}}$$

Détermination de f'*, équation réduite de* f *dans la base* B'

On pose $x = \Omega_1 + x'$ et $y = \Omega_2 + y'$, où Ω_1 et Ω_2 désignent respectivement les coordonnées de Ω dans B. Alors

$$\boxed{f'(x', y') := f(\Omega_1 + x', \Omega_2 + y')}$$

est l'équation réduite recherchée (la partie linéaire a disparu).
$f'(x', y')$ est de la forme $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + f(\Omega_1, \Omega_2)$.

Détermination de f''*, équation réduite de* f *dans la base* B''

On cherche les vecteurs propres **normés** de M_Q. On les note e_1 et e_2, où e_1 est le vecteur propre associé à α (la plus petite valeur propre). On note $P = (e_1 \quad e_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $M = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Alors

$$\boxed{f''(u, v) := f'(M)}$$

est l'équation réduite recherchée (la partie « rectangle » a disparu).
$f''(u, v)$ est de la forme $\alpha u^2 + \beta v^2 + f(\Omega_1, \Omega_2)$.

PARABOLE

Détermination de l'équation réduite

On suppose $\beta = 0$, on note e_1 et e_2 les vecteurs propres **normés** de M_Q (où e_1 sera le vecteur propre associé à α), $P = (e_1 \quad e_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $M = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Alors l'équation de la conique dans la base (O, e_1, e_2) est de la forme

$$f(M) = u^2 + 2a'u + b'v + c' = 0,$$

après éventuelle division membre à membre de l'équation $f'(M) = 0$ par le coefficient (nécessairement non nul) de u^2.

Détermination du sommet Ω

Notre conique peut aussi s'écrire
$(u + a')^2 + b'v + c' - a'^2 = 0.$

Posons alors $u_0 = -a'$ et $v_0 = \dfrac{c' - a'^2}{-b'}$. Alors

$\boxed{\Omega = u_0\, e_1 + v_0\, e_2}$ est le sommet recherché.

Détermination des foyer et directrice

$$h = \frac{-b'}{4} > 0$$

Posons $\gamma = f(\Omega_1, \Omega_2)$. L'équation de la conique dans la base B" *est* $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma = 0$.

• **<u>Si $\gamma < 0$</u>**, alors on échange les rôles de e_1 et e_2, de sorte que la conique soit d'équation ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) dans la base B" :

$$\beta u^2 + \alpha v^2 = -\gamma$$
$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{-\gamma/\beta} + \frac{v^2}{-\gamma/\alpha} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{A^2} - \frac{v^2}{B^2} = 1,$$

en posant $A^2 = \frac{\beta}{-\gamma} > 0$ et $B^2 = \frac{\alpha}{\gamma} > 0$.

• **<u>Si $\gamma > 0$</u>**, alors la conique aura pour équation ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) dans la base B" :

$$-\alpha u^2 - \beta v^2 = \gamma$$
$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{\gamma/-\alpha} + \frac{v^2}{\gamma/-\beta} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{A^2} - \frac{v^2}{B^2} = 1,$$

en posant $A^2 = \frac{-\alpha}{\gamma} > 0$ et $B^2 = \frac{\beta}{\gamma} > 0$.

Dans les deux cas, on reconnaît bien l'équation réduite d'une hyperbole !!!

• **<u>Si $\alpha, \beta, -\gamma < 0$ ou $\alpha, \beta, -\gamma > 0$</u>**, alors la conique aura pour équation dans la base B" :

$$\alpha u^2 + \beta v^2 = -\gamma$$
$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{-\gamma/\alpha} + \frac{v^2}{-\gamma/\beta} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1,$$

en posant $A^2 = \frac{\alpha}{-\gamma} > 0$ et $B^2 = \frac{\beta}{-\gamma} > 0$.

• **<u>Les cas $\alpha, \beta, \gamma < 0$ ou $\alpha, \beta, \gamma > 0$</u>**, ne sont pas possibles, car une somme de deux carrés affectés de coefficients positifs ne peut être négative !!

On reconnaît bien l'équation réduite d'une ellipse !!!

Déterminons l'excentricité e, la distance x_0 entre l'origine Ω et chaque foyer situé sur le grand-axe et h la distance entre l'origine Ω et chaque directrice perpendiculaire au grand-axe.

Hyperbole :

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$
$$x_0 = |A| \cdot e$$
$$h = \frac{|A|}{e}$$

Ellipse :

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$
$$x_0 = |A| \cdot e$$
$$h = \frac{|A|}{e}$$

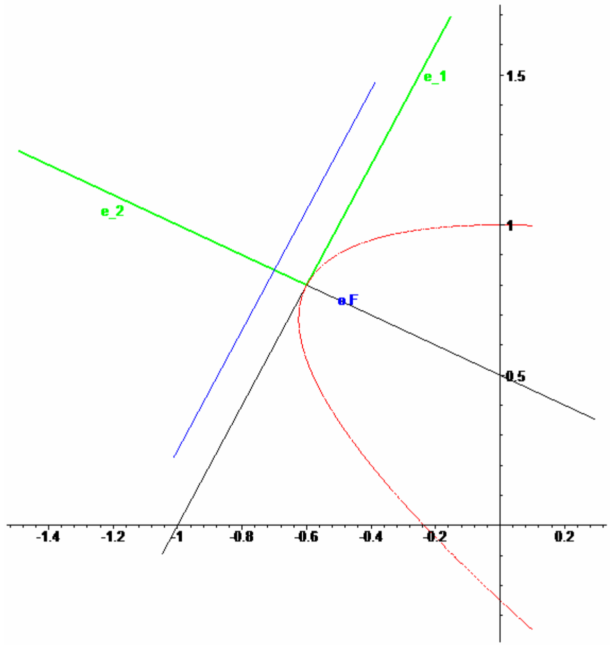
Dans les trois cas, pour avoir les coordonnées des foyers dans le repère originel B, il suffit d'appliquer les changements de variables inverses :

- hyperbole et ellipse : $F_1 = \Omega + h\,\vec{e_1}$ et $F_2 = \Omega - h\,\vec{e_1}$;
- parabole : $F = S + h\vec{e_2}$.

Remarque : pour l'hyperbole et l'ellipse, on utilise $\vec{e_1}$ car le foyer a pour coordonnées ($\pm h$, 0) dans B", alors que pour la parabole, le foyer a pour coordonnées (0, h) dans B", d'où l'utilisation de $\vec{e_2}$. L'équation réduite d'une parabole dans B" est alors : $x^2 = 4hy \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4h}$.

EXEMPLES

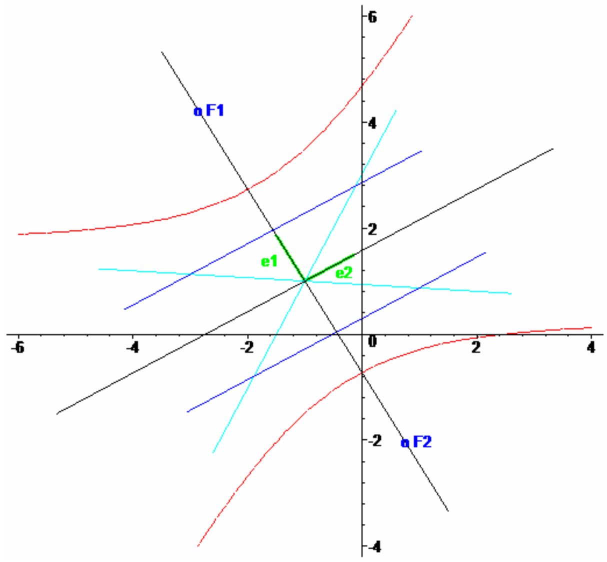
1) **Parabole** : $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 1 = 0$



$$\Omega = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \;;\; \mathrm{F} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \;;\; \mathrm{P_D} = \left(-\frac{7}{10}, \frac{17}{20}\right) \;;\; \vec{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \;;\; \vec{e_2} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Equation réduite de la parabole dans B” : $y = -x^2\sqrt{5}$.

2) **Hyperbole** : $-\frac{3}{4}x^2 - \frac{13\sqrt{3}}{2}xy + \frac{23}{4}y^2 + \left(\frac{13\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right)x - \left(\frac{13\sqrt{3}}{2} + \frac{23}{2}\right)y + \frac{13\sqrt{3}}{2} - 31 = 0$

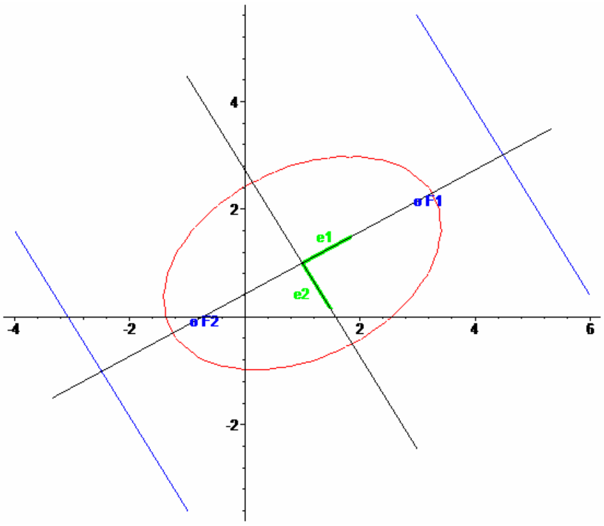


$$\Omega = (-1, 1) \;;\; \mathrm{F_1} = \left(-1 - \frac{\sqrt{13}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{39}}{2}\right) \;;\; \mathrm{F_2} = \left(-1 + \frac{\sqrt{13}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{39}}{2}\right) \;;$$

$$\vec{e_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;;\; \vec{e_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Equation réduite de l’hyperbole dans B” : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3) **Ellipse** : $\frac{21}{4}x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}xy + \frac{31}{4}y^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2}\right)x - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{31}{2}\right)y + \frac{5\sqrt{3}}{2} - 23 = 0$



$\Omega = (1, 1)$; $F_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; $F_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$;

$\vec{e_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\vec{e_2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Equation réduite de l'ellipse dans B" : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$