CAPES interne 2009 de Mathématiques
CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie – *Isocrate*

Problème 1 : Le théorème de Morley

C'est un théorème qui permet de fabriquer de la symétrie à partir de rien. Il a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : « *Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral.* »
Ce problème en propose trois démonstrations différentes. Les trois parties sont indépendantes et les résultats de l'une ne peuvent donc pas être utilisés dans l'autre.

Notations
On travaille dans le plan affine euclidien.
Si O, A et B sont trois points du plan (avec $A \neq O$ et $B \neq O$), on note $\widehat{AOB}$ (ou $\widehat{BOA}$, ou $\widehat{O}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0,\pi]$) délimité par les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.
Par abus de notation, on note encore $\widehat{AOB}$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.
Soit d une droite du plan passant par O, on dira que d est une trisectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ si et seulement s'il existe un point M de d, distinct de O, tel que

$$\widehat{AOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB} \quad \text{ou} \quad \widehat{AOM} = \frac{2}{3}\widehat{AOB}$$

(de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices). La distance entre deux points A et B est notée AB.

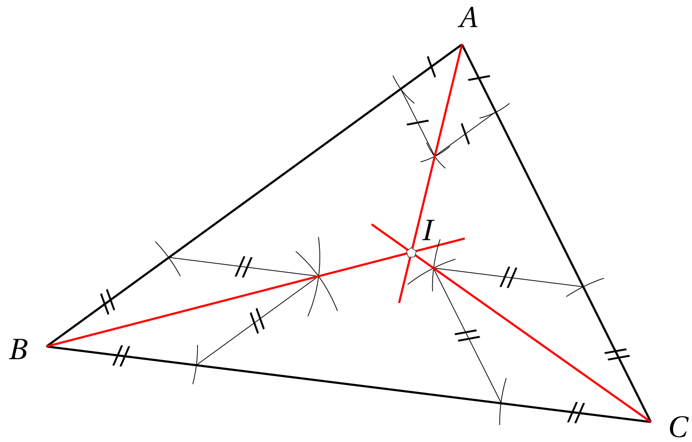
Partie A : Première démonstration

I. Préliminaires

Soit ABC un triangle non plat.

A.I.1 Construire à la règle et au compas le centre du cercle inscrit au triangle ABC, noté I. On laissera apparentes toutes les lignes de construction.

Avant la construction, on rappelle une propriété intéressante du losange : « Si $LMNO$ est un losange, alors la diagonale (LN) est la bissectrice intérieure de l'angle géométrique $\widehat{MLO}$. » Nous allons donc construire à partir du point A, un losange en plaçant deux points (l'un sur $[AB]$ et l'autre sur $[AC]$) à égale distance de A, et placer ensuite le dernier point formant un losange. Ce point relié à A sera donc la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$:



A.I.2 Prouver l'égalité : $\widehat{\boldsymbol{BIC}} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\widehat{\boldsymbol{A}}}{\mathbf{2}}$.

On rappelle une propriété des angles d'un triangle, que nous noteront (P) jusqu'à la fin de ce document : « *Si ABC désigne un triangle quelconque, alors $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$.* » Nous remarquons, avec les notations introduites dans l'énoncé, que l'on peut écrire

$$\widehat{IBC} = \frac{\widehat{B}}{2} \qquad \text{et} \qquad \widehat{ICB} = \frac{\widehat{C}}{2}.$$

En appliquant la propriété (P) à deux reprises (d'abord dans le triangle BIC, puis ABC), nous en déduisons que

$$\widehat{BIC} \overset{(P)}{=} \pi - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} = \pi - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} \overset{(P)}{=} \pi - \frac{\pi - \widehat{A}}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

A.I.3 On note $\boldsymbol{A_1}$ le point d'intersection de la bissectrice intérieure du triangle $\boldsymbol{ABC}$ issue du sommet $\boldsymbol{A}$ avec le segment $[\boldsymbol{BC}]$.
Prouver que si $\boldsymbol{J}$ est un point intérieur au triangle $\boldsymbol{ABC}$, situé sur la bissectrice issue de $\boldsymbol{A}$ (c'est-à-dire un point du segment $[\boldsymbol{AA_1}]$) vérifiant l'égalité $\widehat{\boldsymbol{BJC}} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\widehat{\boldsymbol{A}}}{\mathbf{2}}$ alors le point $\boldsymbol{J}$ est confondu avec le point $\boldsymbol{I}$.

Notons $[AI[=[AI]\backslash\{I\}$ et $]IA_1]=[IA_1]\backslash\{I\}$. Nous allons procéder par l'absurde. Deux cas sont à distinguer :

Supposons que $\boldsymbol{J} \in [\boldsymbol{AI}[$: Alors $\widehat{JBC} > \widehat{B}/2$ et $\widehat{JCB} > \widehat{C}/2$. Or la propriété (P) donne

$$\widehat{JBC} + \widehat{JCB} = \pi - \widehat{BJC} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

De plus,

$$\widehat{JBC} + \widehat{JCB} > \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} \overset{(P)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Cette inégalité contredit l'égalité précédente, prouvant que $J \notin [AI[$.

Supposons que $\boldsymbol{J} \in]\boldsymbol{IA_1}]$: Alors $\widehat{JBC} < \widehat{B}/2$ et $\widehat{JCB} < \widehat{C}/2$. Or la propriété (P) donne

$$\widehat{JBC} + \widehat{JCB} = \pi - \widehat{BJC} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

De plus,

$$\widehat{JBC} + \widehat{JCB} < \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} \overset{(P)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Cette inégalité contredit l'égalité précédente, prouvant que $J \notin]IA_1]$.

Puisque $J \in [AA_1]$, il est nécessaire que $J = I$.

II. Construction auxiliaire

Soit $\boldsymbol{PQR}$ un triangle équilatéral et soient $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ trois nombres réels de l'intervalle $]\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}[$ tels que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$. On construit sur les côtés du triangle $\boldsymbol{PQR}$, et à l'extérieur de ce triangle, trois triangles :

- $\diamond$ $\boldsymbol{P'QR}$ **isocèle en** $\boldsymbol{P'}$ **et dont les angles à la base ont pour mesure** $\boldsymbol{u}$**,**
- $\diamond$ $\boldsymbol{PQ'R}$ **isocèle en** $\boldsymbol{Q'}$ **et dont les angles à la base ont pour mesure** $\boldsymbol{v}$**,**
- $\diamond$ $\boldsymbol{PQR'}$ **isocèle en** $\boldsymbol{R'}$ **et dont les angles à la base ont pour mesure** $\boldsymbol{w}$**.**

A.II.1.1 **Calculer** $\widehat{\boldsymbol{Q'RQ}}+\widehat{\boldsymbol{R'QR}}$ **en fonction de** $\boldsymbol{u}$**.**

Puisque PQR est un triangle équilatéral, chacun de ses angles mesure $\pi/3$. On a donc :

$$\begin{aligned}\widehat{Q'RQ}+\widehat{R'QR} &= \left(\widehat{Q'RP}+\widehat{PRQ}\right)+\left(\widehat{R'QP}+\widehat{PQR}\right)\\ &= v+\frac{\pi}{3}+w+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+(v+w)=\frac{2\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}-u\right)=\frac{4\pi}{3}-u.\end{aligned}$$

A.II.1.2 **Montrer que les droites** $(\boldsymbol{QR'})$ **et** $(\boldsymbol{Q'R})$ **sont sécantes. On notera** $\boldsymbol{A}$ **leur point d'intersection. On notera de même** $\boldsymbol{B}$ **le point d'intersection des droites** $(\boldsymbol{RP'})$ **et** $(\boldsymbol{R'P})$ **et** $\boldsymbol{C}$ **le point d'intersection des droites** $(\boldsymbol{PQ'})$ **et** $(\boldsymbol{P'Q})$**.**

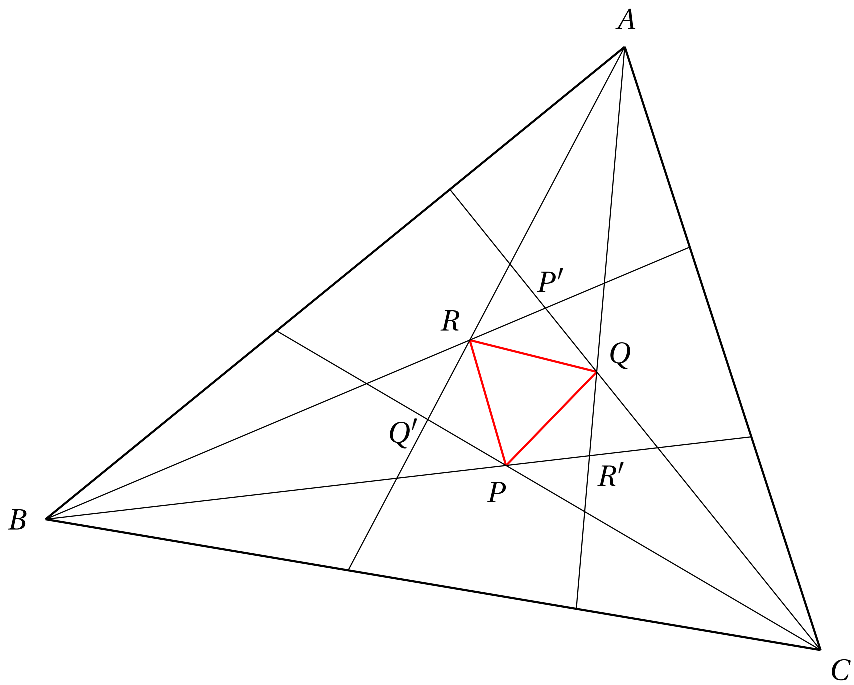
Raisonnons par l'absurde et supposons que les droites (QR') et $(Q'R)$ soient parallèles. Dans ce cas, les angles $\widehat{Q'RQ}$ et $\widehat{RQA}$ sont alternes-internes et égaux, amenant l'égalité

$$\widehat{Q'RQ}+\widehat{R'QR}=\widehat{RQA}+\widehat{R'QR}=\widehat{RQA}+\widehat{RQR'}=\widehat{AQR'}=\pi.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, nous allons alors déterminer la valeur de u :

$$\frac{4\pi}{3}-u=\pi \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4\pi}{3}-\pi=u \quad\Leftrightarrow\quad u=\frac{\pi}{3}.$$

Or, d'après l'énoncé, $u\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$, donc l'égalité $u=\frac{\pi}{3}$ est absurde, prouvant que les droites (QR') et $(Q'R)$ ne sont pas parallèles, donc sécantes.



Dans la suite de la partie A, on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

A.II.1.3 **Montrer que $\widehat{Q'PB} = u$. En déduire la valeur de $\widehat{CPR'}$.**

On a
$$\widehat{Q'PB} = \widehat{BPR'} - \widehat{R'PQ} - \widehat{QPR} - \widehat{RPQ'} = \pi - w - \frac{\pi}{3} - v = \frac{2\pi}{3} - v - w = u.$$
Puisque les angles $\widehat{CPR'}$ et $\widehat{Q'PB}$ sont opposés par le sommet, ils ont la même mesure, d'où
$$\widehat{CPR'} = \widehat{Q'PB} = u.$$

De même, on montre que $\widehat{R'QC} = v$ et $\widehat{P'RA} = w$ et on en déduit la valeur de $\widehat{AQP'}$ et $\widehat{BRQ'}$.

A.II.2.1 **Montrer que la droite (PP') est une des médiatrices du triangle $P'RQ$.**

Soit d la médiatrice du segment $[RQ]$. On applique la propriété suivante : « *Tout point équidistant des extrémités d'un segment se trouve sur la médiatrice de ce segment.* » Puisque le triangle $RP'Q$ est isocèle en P', le point P' est équidistant des points R et Q et se trouve donc sur la médiatrice d. De même, puisque le triangle PQR est isocèle (en particulier) en P, on a que $P \in d$. Par conséquent, $d = (PP')$, et (PP') est bien une médiatrice du triangle $P'RQ$.

A.II.2.2 **En déduire que (PP') est une bissectrice du triangle $BP'C$.**

Nous utiliserons la propriété suivante : « *Dans un triangle isocèle, les hauteur, bissectrice et médiane issues du sommet principal sont confondues avec la médiatrice du côté opposé.* » Appliquée au triangle $P'RQ$ isocèle en P', il vient que la bissectrice issue du point P est confondue avec la médiatrice $d = (PP')$ du côté opposé $[RQ]$. Or, la bissectrice issue du point P' dans le triangle $P'RQ$ est la même que celle issue du point P' dans le triangle $BP'C$ (l'angle $\widehat{P'}$ reste le même !). Par conséquent, (PP') est bien une bissectrice du triangle $BP'C$.

A.II.3.1 **Écrire $\widehat{BPC}$ et $\widehat{BP'C}$ en fonction de u.**

Puisque la somme des angles autour du point P est égale à 2π, nous avons
$$\begin{aligned}
\widehat{BPC} &= 2\pi - \widehat{CPR'} - \widehat{R'PQ} - \widehat{QPR} - \widehat{RPQ'} - \widehat{Q'PB} \\
&= 2\pi - u - w - \frac{\pi}{3} - v - u = 2\pi - (u + v + w) - \frac{\pi}{3} - u \\
&= 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - u = \pi - u.
\end{aligned}$$

De plus, grâce à la propriété (P), nous avons
$$\widehat{BP'C} = \widehat{RP'Q} = \pi - \widehat{P'RQ} - \widehat{P'QR} = \pi - u - u = \pi - 2u.$$

A.II.3.2 **Montrer que $\widehat{BPC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{BP'C}}{2}$.**

Nous utilisons les résultats de la question précédente :
$$\widehat{BPC} = \pi - u = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{2u}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi - 2u}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BP'C}}{2}.$$

A.II.4 **Montrer que P appartient aux bissectrices des angles $\widehat{P'BC}$ et $\widehat{P'CB}$.**

P est un point intérieur au triangle $BP'C$, situé sur la bissectrice issue de P' (question A.II.2.2) et vérifiant l'égalité (question précédente)

$$\widehat{BPC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BP'C}}{2}.$$

D'après la question A.I.3, le point P est confondu avec le centre du cercle inscrit au triangle $BP'C$ et se trouve donc à l'intersection des trois bissectrices de ce triangle, en particulier sur les bissectrices des angles $\widehat{P'BC}$ et $\widehat{P'CB}$.

De même, on montre que Q appartient aux bissectrices des angles $\widehat{Q'CA}$ et $\widehat{Q'AC}$, et que R appartient aux bissectrices des angles $\widehat{R'AB}$ et $\widehat{R'BA}$.

A.II.5 **Dresser, en la justifiant, la liste des six trisectrices du triangle ABC.**

P se trouve sur les bissectrices dans angles $\widehat{P'BC}$ et $\widehat{P'CB}$, donc

$$\widehat{PBP'} = \widehat{PBC} \quad (E_1) \qquad \text{et} \qquad \widehat{PCP'} = \widehat{PCB} \quad (E_2).$$

Q se trouve sur les bissectrices dans angles $\widehat{Q'CA}$ et $\widehat{Q'AC}$, donc

$$\widehat{QCQ'} (= \widehat{P'CP}) = \widehat{QCA} \quad (E_3) \qquad \text{et} \qquad \widehat{QAQ'} = \widehat{QAC} \quad (E_4).$$

R se trouve sur les bissectrices dans angles $\widehat{R'AB}$ et $\widehat{R'BA}$, donc

$$\widehat{RAR'} (= \widehat{Q'AQ}) = \widehat{RAB} \quad (E_5) \qquad \text{et} \qquad \widehat{RBR'} (= \widehat{P'BP}) = \widehat{RBA} \quad (E_6).$$

(E_2) et (E_3) donnent : $\widehat{PCP'} = \widehat{PCB} = \widehat{QCA}$ $(\sharp)$
(E_1) et (E_6) donnent : $\widehat{PBP'} = \widehat{PBC} = \widehat{RBA}$ $(\flat)$
(E_4) et (E_5) donnent : $\widehat{QAQ'} = \widehat{QAC} = \widehat{RAB}$ $(\natural)$

La double-égalité $(\sharp)$ traduit que (CP) et (CP') sont les deux trisectrices de $\widehat{C}$.
La double-égalité $(\flat)$ traduit que (BP) et (BP') sont les deux trisectrices de $\widehat{B}$.
La double-égalité $(\natural)$ traduit que (AQ) et (AQ') sont les deux trisectrices de $\widehat{A}$.

A.II.6 **Donner les mesures des angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ en fonction de u, v, w.**

Dans le triangle BRP, et en utilisant la propriété (P), nous avons

$$\widehat{RBP} = \widehat{PBP'} = \pi - \widehat{BRP} - \widehat{BPR} = \pi - (u+v) - (w+v) = \pi - (u+v+w) - v = \pi - \frac{2\pi}{3} - v = \frac{\pi}{3} - v.$$

D'après $(\flat)$, on en déduit que $\widehat{ABC} = 3\widehat{PBP'} = \pi - 3v$. On montre de manière analogue que $\widehat{CAB} = \pi - 3u$ et $\widehat{BCA} = \pi - 3w$.

<u>Vérification</u> : Puisque ABC est un triangle, on doit avoir l'égalité $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \pi$:

$$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = (\pi - u) + (\pi - v) + (\pi - w) = 3\pi - 3(u+v+w) = 3\pi - 3\frac{2\pi}{3} = 3\pi - 2\pi = \pi.$$

III. Démonstration du théorème

Soient $A_1B_1C_1$ un triangle non plat et u, v, w trois réels définis par les relations suivantes :

$$\widehat{A_1} = \pi - 3u, \quad \widehat{B_1} = \pi - 3v \quad \text{et} \quad \widehat{C_1} = \pi - 3w.$$

A.III.1 **Calculer $u + v + w$.**

D'après les relations données dans l'énoncé, on a

$$3(u+v+w) = (\pi - \widehat{A_1}) + (\pi - \widehat{B_1}) + (\pi - \widehat{C_1}) = 3\pi - (\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1}) \overset{(P)}{=} 3\pi - \pi = 2\pi,$$

d'où

$$u + v + w = \frac{2\pi}{3}.$$

A.III.2 **Soit PQR un triangle équilatéral quelconque. La construction de la question II, à partir du triangle PQR et des valeurs de u, v et w ici définies, aboutit à un triangle ABC. Justifier que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.**

D'après la partie II, le triangle ABC résultant de la construction, avec u, v, w définis **dans cette question** et vérifiant $u + v + w = \frac{2\pi}{3}$ (ce qui est le cas d'après la question précédente), vérifie les trois égalités :

$$\widehat{A} = \pi - 3u = \widehat{A_1}, \quad \widehat{B} = \pi - 3v = \widehat{B_1} \quad \text{et} \quad \widehat{C} = \pi - 3w = \widehat{C_1}.$$

Rappelons que deux triangles sont dits *semblables* lorsque leurs angles sont deux à deux égaux, ce qui est le cas ici. Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont donc semblables.

A.III.3 **Démontrer le théorème de Morley.**

Notons respectivement H_1, H_2 et H_3 les projetés orthogonaux de P sur (BP'), (CP') et (BC). Puisque P se trouve par hypothèse sur les bissectrices des angles $\widehat{P'CB}$ et $\widehat{P'BC}$, P est équidistant des droites (BP'), (CP') et (BC), autrement dit, $PH_1 = PH_2 = PH_3$.

En effet, les triangles BPH_1 et BPH_3 sont isométriques car ils ont leurs trois angles de même mesure deux à deux (les angles droits $\widehat{PH_1B} = \widehat{PH_3B}$, les angles issus de la bissectrices $\widehat{PBH_1} = \widehat{PBH_3}$ et les deux autres angles $\widehat{BPH_1}$ et $\widehat{BPH_3}$ sont égaux grâce à la propriété (P)) et le côté commun $[BP]$; il vient alors $PH_1 = PH_3$. On montre de la même manière que les triangles CPH_2 et CPH_3 sont isométriques et entraînent donc $PH_2 = PH_3$.

De plus, $\widehat{H_1RP} = \widehat{H_1RQ'} + \widehat{Q'RP} = w + v$ et $\widehat{H_2QP} = \widehat{H_2QR'} + \widehat{R'QP} = v + w$. Dans les triangles H_1RP et H_2QP, nous déduisons de la propriété (P) que $\widehat{H_1PR} = \widehat{H_2PQ}$, rendant ces triangles semblables. Cependant, l'égalité $PH_1 = PH_2$ nous assure que ces deux triangles sont isométriques, de sorte que $PR = PQ$.

Nous montrerions de la même manière que $QP = QR$, justifiant que le triangle PQR est équilatéral.

Partie B : Deuxième démonstration

I. La relation des sinus

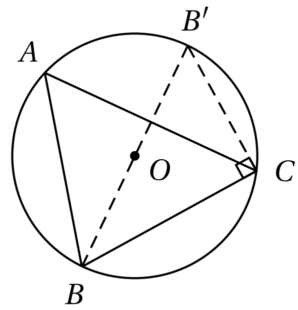
Soit ABC un triangle non plat, O le centre de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle circonscrit. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

B.I.1 Montrer que $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2r$ $\left(\text{on distinguera les cas } \widehat{A} < \dfrac{\pi}{2},\ \widehat{A} = \dfrac{\pi}{2} \text{ et } \widehat{A} > \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Distinguons les cas demandés :

Supposons que $\widehat{A} < \pi/2$:

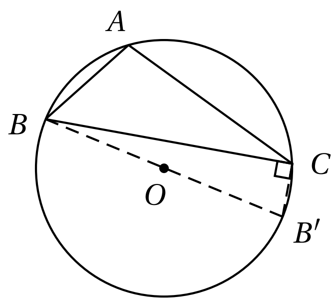
Notons B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit au triangle ABC. D'après le théorème de l'angle inscrit, nous avons l'égalité $\widehat{BAC} = \widehat{BB'C}$ (le même arc est intercepté). Or, le triangle $BB'C$ est inscrit dans un cercle dont un diamètre est le côté $[BB']$ de ce triangle, donc (par théorème) le triangle $BB'C$ est rectangle en C, ce qui nous permet de conclure que



$$\sin(\widehat{A}) = \sin(\widehat{BB'C}) = \frac{BC}{BB'} \Leftrightarrow \frac{\sin(\widehat{A})}{BC} = \frac{1}{2r} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2r.$$

Supposons que $\widehat{A} > \pi/2$:

Notons B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit au triangle ABC. D'après le théorème de l'angle inscrit, nous avons l'égalité $\widehat{BAC} = \pi - \widehat{BB'C}$ (les arcs complémentaires sont interceptés). Or, le triangle $BB'C$ est inscrit dans un cercle dont un diamètre est le côté $[BB']$ de ce triangle, donc (par théorème) le triangle $BB'C$ est rectangle en C, ce qui nous permet de conclure que



$$\sin(\widehat{A}) = \sin(\pi - \widehat{BB'C}) = \sin(\widehat{BB'C}) = \frac{BC}{BB'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\widehat{A})}{BC} = \frac{1}{2r} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2r.$$

Supposons que $\widehat{A} = \pi/2$: Dans ce cas, le triangle ABC est rectangle en A, et par propriété du cours, le milieu de l'hypoténuse (qui est aussi le centre du cercle circonscrit O) est équidistant des trois sommets du triangle. On en tire l'égalité $OA = OB = OC$ entraînant $a = BC = BO + OC = 2OA = 2r$. Puisque $\sin(\widehat{A}) = 1$, on a bien

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2r.$$

B.I.2 En déduire la relation dite des sinus : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r$.

Puisque ABC est un triangle quelconque, on peut facilement échanger les rôles de A et B. L'égalité de la question précédente s'écrit alors

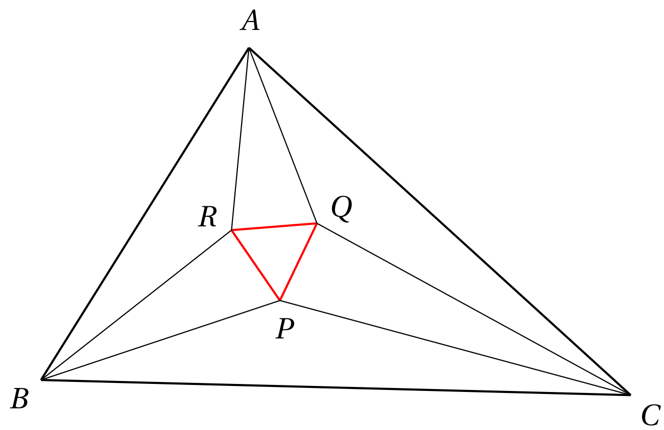
$$\frac{AC}{\sin(\widehat{B})} = 2r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = 2r.$$

De même, on peut échanger les rôles de A et C. Au final, on obtient la triple égalité suivante :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2r.$$

II. Démonstration du théorème de Morley

Soit ABC un triangle non plat quelconque. On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous. Soient α, β, γ les réels définis par $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$, $\widehat{C} = 3\gamma$.



Dans la suite de la partie B, on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

B.II.1 **En appliquant la formule des sinus aux triangles ABR et ABC, montrer que :**

$$\boldsymbol{AR = 2r \sin\beta \, \frac{\sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}.$$

La formule des sinus dans le triangle ABR donne :

$$\frac{BR}{\sin \widehat{BAR}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ARB}} = \frac{AR}{\sin \widehat{ABR}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BR}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin \widehat{ARB}} = \frac{AR}{\sin\beta} \quad (\bigstar_1)$$

La formule des sinus dans le triangle ABC donne :

$$\frac{BA}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = 2r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BA}{\sin(3\alpha)} = \frac{AB}{\sin(3\gamma)} = \frac{AC}{\sin(3\beta)} = 2r \quad (\bigstar_2)$$

Notons encore $(\bigstar_3)$ la relation $\sin x = \sin(\pi - x)$, vraie pour tout réel x. On a alors :

$$AR \overset{(\bigstar_1)}{=} \frac{AB \sin\beta}{\sin \widehat{ARB}} \overset{(\bigstar_2),(P)}{=} \frac{\big(2r\sin(3\gamma)\big)\sin\beta}{\sin\big(\pi - (\alpha+\beta)\big)} \overset{(\bigstar_3)}{=} 2r\sin\beta \frac{\sin(\pi - 3\gamma)}{\sin\big(\pi - (\alpha+\beta)\big)} \overset{(\bigstar_3),(P)}{=} 2r\sin\beta \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

B.II.2 **Montrer que, pour tout nombre réel $\boldsymbol{\theta}$, on a la relation suivante : $\boldsymbol{\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)}$.**
On rappelle que, pour tout couple de réels (p, q), on a la relation suivante :

$$\boldsymbol{\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}.$$

On rappelle que, pour tout réel x, on a

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

D'où les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
& \cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{4} + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ & 4\cos^2\theta - 1 = e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2-1 = e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+1 \\
\Rightarrow\ & \sin\theta(4\cos^2\theta-1) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+1) \\
\Rightarrow\ & \sin\theta(4\cos^2\theta-1) = \frac{1}{2i}(e^{3i\theta}+e^{-i\theta}+e^{i\theta}-e^{i\theta}-e^{-3i\theta}-e^{-i\theta}) \\
\Rightarrow\ & \sin\theta(4\cos^2\theta-1) = \frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} = \sin(3\theta).
\end{aligned}$$

B.II.3 **Montrer que : $\boldsymbol{4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) = \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}$.**

D'une part,

$$\begin{aligned}
4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin(\alpha+\beta) &= 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right) \\
&= 4\sin\gamma\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\gamma+\cos\frac{\pi}{3}\sin\gamma\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\gamma-\cos\frac{\pi}{3}\sin\gamma\right) \\
&= 4\sin\gamma\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos^2\gamma - \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\gamma\right] \\
&= \sin\gamma(3\cos^2\gamma-\sin^2\gamma) = 3\sin\gamma(1-\sin^2\gamma)-\sin^3\gamma \\
&= 3\sin\gamma - 3\sin^3\gamma - \sin^3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha+3\beta) &= \sin(\pi-3\gamma) = \sin(3\gamma) \overset{\text{B.II.2}}{=} \sin\gamma(4\cos^2\gamma-1) \\
&= 4\sin\gamma(1-\sin^2\gamma)-\sin\gamma = 4\sin\gamma-4\sin^3\gamma-\sin\gamma \\
&= 3\sin\gamma-4\sin^3\gamma.
\end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin(\alpha+\beta) = \sin(3\alpha+3\beta) \quad\Leftrightarrow\quad 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) = \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Cette équivalence provient du fait que ABC est un triangle non plat, donc $0 < \alpha+\beta = \frac{\pi}{3}-\gamma < \frac{\pi}{3}$, d'où $\sin(\alpha+\beta) \neq 0$.

B.II.4 **Montrer que : $\boldsymbol{AR = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}$.**

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} AR &\overset{\text{B.II.1}}{=} 2r\sin\beta\frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ &\overset{\text{B.II.3}}{=} 2r\sin\beta\left(4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\right) \\ &= 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right). \end{aligned}$$

B.II.5 **En déduire que : $\boldsymbol{AQ = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}$.**

En appliquant les résultats des questions B.II.1 à B.II.4 en partant des triangles AQC et ABC, on montre de la même manière (les rôles de β et γ sont échangés, ainsi que ceux de R et Q) que

$$AQ = 8r\sin\gamma\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right).$$

B.II.6 **On considère le point $\boldsymbol{M}$ de la demi-droite $[\boldsymbol{AQ})$ vérifiant $\boldsymbol{\widehat{ARM} = \frac{\pi}{3}+\beta}$.**

B.II.6.1 **Calculer $\boldsymbol{\widehat{AMR}}$.**

Dans le triangle ARM, on a

$$\widehat{AMR} \overset{(P)}{=} \pi - \widehat{ARM} - \widehat{MAR} = \pi - \left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) - \alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{3\alpha+3\beta}{3} \overset{(P)}{=} \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi-3\gamma}{3} = \frac{\pi}{3}+\gamma.$$

B.II.6.2 **En appliquant la relation des sinus dans le triangle $\boldsymbol{ARM}$, montrer que $\boldsymbol{AM = AQ}$.**

La relation des sinus dans le triangle ARM donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{RM}{\widehat{RAM}} = \right)\frac{AR}{\widehat{AMR}} = \frac{AM}{\widehat{ARM}} \quad &\Leftrightarrow \quad AM = \frac{AR\sin\widehat{ARM}}{\sin\widehat{AMR}} = \frac{AR\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} \\ &\overset{\text{B.II.4}}{\Leftrightarrow} \quad AM = \frac{8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad AM = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) \\ &\overset{\text{B.II.5}}{\Leftrightarrow} \quad AM = AQ. \end{aligned}$$

B.II.6.3 **Montrer que les points $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont confondus.**

D'après l'énoncé de la question B.II.6, M appartient à la demi-droite $[AQ)$. Or, d'après la question précédente, $AM = AQ$. Il vient que $M = Q$, et les deux points M et Q sont donc confondus.

B.II.6.4 **Prouver les égalités suivantes : $\widehat{ARQ} = \dfrac{\pi}{3} + \beta$ et $\widehat{AQR} = \dfrac{\pi}{3} + \gamma$.**

On a simplement, du fait que $M = Q$ (question précédente),

$$\widehat{ARQ} = \widehat{ARM} \overset{\text{B.II.6}}{=} \frac{\pi}{3} + \beta \qquad \text{et} \qquad \widehat{AQR} = \widehat{AMR} \overset{\text{B.II.6.1}}{=} \frac{\pi}{3} + \gamma.$$

B.II.7 **Montrer que $RQ = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.**

On applique le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ARQ :

$$\begin{aligned} QR^2 &= AR^2 + AQ^2 - 2AR\cdot AQ\cos\widehat{RAQ} = AR^2 + AQ^2 - 2AR\cdot AQ\cos\alpha \\ &= 64r^2\sin^2\beta\sin^2\gamma\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha\right). \end{aligned}$$

La dernière égalité nous est assurée par les questions B.II.4 et B.II.5.

Puisque $\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) + \left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) + \alpha = \frac{2\pi}{3} + \alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$, on peut à nouveau utiliser le théorème d'Al-Kashi dans un triangle d'angles $\frac{\pi}{3}+\gamma$, $\frac{\pi}{3}+\beta$, α. On choisit ce triangle de sorte que le rayon du cercle circonscrit soit égal à 1, afin que la formule des sinus donne pour longueurs de côtés respectifs $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$, $\sin\alpha$. On trouve alors

$$\sin^2\alpha = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha.$$

Il s'ensuit, en reprenant l'expression de QR^2 calculée ci-dessus, que

$$QR^2 = 64r^2\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad QR = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

B.II.8 **Conclure.**

Nous trouverions de la même manière que

$$RP = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad \text{et} \qquad PQ = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

On en déduit que $RP = PQ = QR$, c'est-à-dire que PQR est un triangle équilatéral, et le théorème de Morley est bien démontré.

Partie C : Troisième démonstration

La démonstration qui suit est basée sur un article d'Alain Connes datant de 1998 (Institut des Hautes Études Scientifiques).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Chaque point $M(x,y)$ du plan est aussi repéré par son affixe, c'est-à-dire le nombre complexe $z = x + iy$.
Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nuls, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
Le complexe égal à $\exp\left(2i\dfrac{\pi}{3}\right)$ est noté j.

I. Préliminaires

C.I.1 **Résoudre l'équation $z^3 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.**

Soit (E) l'équation complexe $z^3 - 1 = 0$. Puisque $z_0 = 1$ est solution, l'équation (E) devient

$$(z-1)(z^2+z+1) = 0.$$

Le discriminant Δ du trinôme à coefficients réels $z^2 + z + 1$ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 3 = -3 < 0$. Les solutions de ce trinôme sont donc données par

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} j &= \exp\left(2i\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2 \ ; \\ j^2 &= \exp^2\left(2i\frac{\pi}{3}\right) = \exp\left(4i\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_1. \end{aligned}$$

Finalement, l'équation (E) admet comme solutions les nombres complexes 1, j et j^2.

C.I.2 **Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.**

On a

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

C.I.3 **On considère trois points P, Q, R du plan complexe d'affixes respectives p, q, r. Prouver que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ de mesure principale égale à $\pi/3$, si et seulement si $p + jq + j^2 r = 0$. Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral direct.**

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & PQR \text{ équilatéral avec } (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & P \text{ est l'image de } Q \text{ par la rotation de centre } R \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & p - r = e^{-i\frac{\pi}{3}}(q - r) \qquad \text{(écriture complexe d'une rotation)} \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ & p - r + j(q - r) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p + jq - (j+1)r = 0 \\ \overset{\text{C.I.2}}{\Leftrightarrow}\ & p + jq + j^2 r = 0, \end{aligned}$$

où $(*)$ désigne l'égalité

$$-j = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

C.I.4 Montrer que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ de mesure principale égale à $-\pi/3$, si et seulement si $p+j^2q+jr=0$.
Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral indirect.

Nous avons les équivalences suivantes :

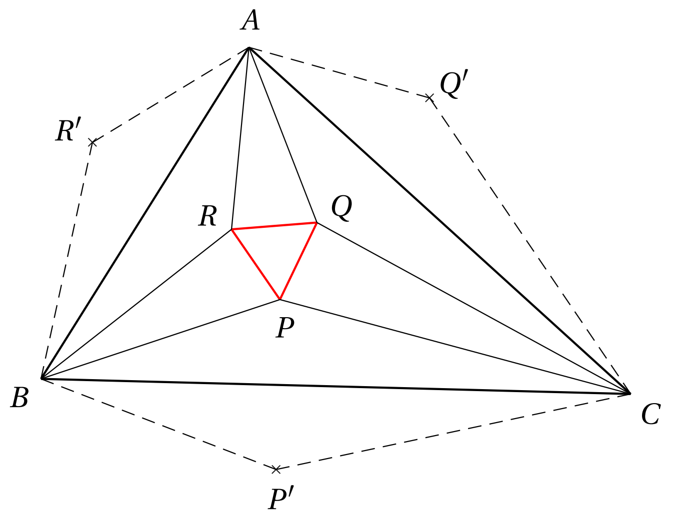
$$\begin{aligned}
& PQR \text{ équilatéral avec } (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = -\frac{\pi}{3} \\
\Leftrightarrow\quad & P \text{ est l'image de } Q \text{ par la rotation de centre } R \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3} \\
\Leftrightarrow\quad & p-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-r) \\
\Leftrightarrow\quad & p-r-e^{i\frac{\pi}{3}}(q-r) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & p-e^{i\frac{\pi}{3}}q + (e^{i\frac{\pi}{3}}-1)r = 0 \\
\overset{(**)}{\Leftrightarrow}\quad & p+j^2q+jr = 0,
\end{aligned}$$

où $(**)$ désigne les deux égalités

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} - e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 \qquad \text{et} \qquad e^{i\frac{\pi}{3}}-1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j.$$

II. Généralités

On considère un triangle non plat ABC que l'on suppose direct, c'est-à-dire que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ soit comprise strictement entre 0 et π.
On note 3α, 3β et 3γ les mesures principales respectives des angles orientés $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle $]0,\pi[$.
On note P, Q, R les points d'intersections des trisectrices issues respectivement des sommes adjacents B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous.



On note P', Q' et R' les symétriques des points P, Q et R respectivement par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB), et A' le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
On rappelle qu'une rotation de centre Ω et d'angle θ $(\theta\in]0,2\pi[)$ est une similitude directe de centre Ω et de rapport $e^{i\theta}$.
On appelle f la rotation de centre A et d'angle 2α, g la rotation de centre B et d'angle 2β et h la rotation de centre C et d'angle 2γ.

C.II.1 **Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CP'})$.**

Rappelons qu'une symétrie axiale inverse les angles orientés. Autrement dit, et dans notre cas, $(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{CP'},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP'})$. Par suite,

$$(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CP'}) = (\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP'}) = 2(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}) = 2\gamma.$$

C.II.2 **Montrer que P est un point fixe de la transformation $g\circ h$, R un point fixe de la transformation $f\circ g$ et Q un point fixe de la transformation $h\circ f$.**

Par symétrie, $CP = CP'$. Grâce à la question précédente, on peut donc dire que P' est l'image de P par la rotation de centre C et d'angle 2γ, ce qui se note $h(P) = P'$. Un raisonnement analogue à C.II.1 permet d'affirmer que $(\overrightarrow{BP'},\overrightarrow{BP}) = 2\beta$. Toujours par symétrie, on a aussi $BP' = BP$. Il vient que P est l'image de P' par la rotation de centre B et d'angle 2β, ce qui s'écrit $g(P') = P$. Au final, on a

$$g\circ h(P) = g\big(h(P)\big) = g(P') = P,$$

et P est bien un point fixe de la transformation $g\circ h$.

On montre de la même manière que R est un point fixe de la transformation $f\circ g$ et Q un point fixe de la transformation $h\circ f$.

III. Quelques calculs numériques

Soit M un point du plan d'affixe z et φ une transformation du plan. Par abus de langage on note encore $\varphi(z)$ l'affixe du point $\varphi(M)$.

C.III.1 **Justifier l'existence de six nombres complexes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 tels que, pour tout nombre complexe z : $f(z) = a_1z + b_1$, $g(z) = a_2z + b_2$ et $h(z) = a_3z + b_3$.**

Notons a, b et c les affixes respectives des points A, B et C, puis partons de l'écriture complexe de la rotation f :

$$f(z) - a = e^{i2\alpha}(z-a) \quad\Leftrightarrow\quad f(z) = e^{i2\alpha}z - ae^{i2\alpha} + a \quad\Leftrightarrow\quad e^{i2\alpha}z + a(1-e^{i2\alpha}).$$

En posant $a_1 = e^{i2\alpha}$ et $b_1 = a(1-a_1) = a(1-e^{i2\alpha})$, on trouve bien que $f(z) = a_1z + b_1$. De la même manière, en posant $a_2 = e^{i2\beta}$, $a_3 = e^{i2\gamma}$, $b_2 = b(1-a_2)$ et $b_3 = c(1-a_3)$, on trouve bien $g(z) = a_2z+b_2$ et $h(z) = a_3z + b_3$.

C.III.2 **Prouver que ces nombres complexes vérifient les propriétés suivantes : $a_1a_2a_3 = j$, $a_1a_2 \neq 1$, $a_2a_3 \neq 1$ et $a_3a_1 \neq 1$.**

D'une part, nous avons

$$a_1a_2a_3 = e^{i2\alpha}e^{i2\beta}e^{i2\gamma} = e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\frac{2}{3}(3\alpha+3\beta+3\gamma)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j.$$

D'autre part,

$$a_1a_2 = e^{i2\alpha}e^{i2\beta} = e^{2i(\alpha+\beta)}.$$

Supposons que $a_1 a_2 = 1$. Dans ce cas, on aurait

$$\begin{aligned} e^{2i(\alpha+\beta)} = 1 = e^{0i} &\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(3\alpha+3\beta) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\pi - 3\gamma) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \gamma = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Or,

$$\gamma \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[\Rightarrow -\gamma \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[\Rightarrow \pi - \gamma \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[.$$

Nous aboutissons à une contradiction : en effet, l'angle γ strictement compris entre $2\pi/3$ et π ne peut être multiple de π. L'hypothèse de départ est donc fausse, et nous en déduisons que $a_1 a_2 \neq 1$.

Les relations $a_2 a_3 \neq 1$ et $a_3 a_1 \neq 1$ se montrent de la même manière.

C.III.3 **Prouver que les nombres p, q et r vérifient les égalités suivantes :**

$$\boldsymbol{p = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}, \quad q = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1} \quad \text{et} \quad r = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2}.}$$

Nous utilisons les résultats des deux questions précédentes. En effet, P (d'affixe notée p) est un point fixe de la transformation $g \circ h$, donc :

$$\begin{aligned} & p = g \circ h(p) \overset{\text{C.III.1}}{=} g(a_3 p + b_3) \overset{\text{C.III.1}}{=} a_2(a_3 p + b_3) + b_2 = a_2 a_3 p + a_2 b_3 + b_2 \\ \Leftrightarrow \quad & p(1 - a_2 a_3) = a_2 b_3 + b_2 \\ \overset{\text{C.III.2}}{\Leftrightarrow} \quad & p = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}. \end{aligned}$$

Les deux autres égalités se démontrent exactement de la même manière.

C.III.4 ***Un calcul (un peu lourd, mais faisable à la main) donne alors les deux résultats qui suivent.***

◇ ***D'une part, pour tout nombre complexe z, on a :***

$$\boldsymbol{(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = (a_1 a_2 a_3)^3 z + (a_1^2 + a_1 + 1) b_1 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1) b_2 + a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1) b_3.}$$

◇ ***D'autre part, en tenant compte du fait que $a_1 a_2 a_3 = j$, on a :***

$$\boldsymbol{p + jq + j^2 r = -j^2 \, \frac{a_3\left[(a_1^2 + a_1 + 1) b_1 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1) b_2 + a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1) b_3\right]}{a_1 (1 - a_2 a_3)(1 - a_3 a_1)(1 - a_1 a_2)}.}$$

On admet ces deux résultats.

C.III.4.1 **Prouver que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est une translation notée τ.**

On rappelle que la composée de deux rotations est une rotation si la somme des angles est différente de 0 modulo 2π, ou une translation sinon. On en déduit que $f^3 \circ g^3$ est une rotation d'angle $3(2\alpha)+3(2\beta) = 2(3\alpha+3\beta)$. La somme des angles des rotations $f^3 \circ g^3$ et h^3 est alors égale à $2(3\alpha+3\beta)+3\cdot 2\gamma = 2(3\alpha+3\beta+3\gamma) = 2\pi$. Par conséquent, $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est une translation, que l'on note τ.

C.III.4.2 **Déterminer géométriquement l'image du point A par la translation τ. En déduire que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est égale à l'application identité.**

On rappelle que A' le symétrique de A par rapport à (BC). Par symétrie, on a $CA = CA'$ et $3\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'})$. On en tire $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 6\gamma$. Or $h^3(A)$ est l'image du point A par la rotation de centre C et d'angle $3\cdot 2\gamma = 6\gamma$. On en déduit que $h^3(A) = A'$.

Par symétrie, on a $BA = BA'$ et $3\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC})$. On en tire $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) = 6\beta$. Or $g^3(A')$ est l'image du point A' par la rotation de centre B et d'angle $3\cdot 2\beta = 6\beta$. On en déduit que $g^3(A') = A$, donc que $g^3 \circ h^3(A) = A$.

Enfin, puisque f^3 est une rotation de centre A, on a $f^3(A) = A$, c'est-à-dire $f^3 \circ g^3 \circ h^3(A) = A$, ou encore $\tau(A) = A$. Une translation envoyant un point sur lui-même ne peut être que l'identité (translation de vecteur nul). D'où le résultat.

C.III.4.3 **Démontrer le théorème de Morley dans le cas d'un triangle ABC direct puis dans le cas d'un triangle ABC indirect.**

Nous supposons toujours encore le triangle ABC direct. Grâce aux deux égalités données dans l'énoncé de la question C.III.4 et le résultat précédent, on a d'une part pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned} & (f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = (a_1a_2a_3)^3 z + (a_1^2+a_1+1)b_1 + a_1^3(a_2^2+a_2+1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2+a_3+1)b_3 = z \\ \Leftrightarrow\ & (a_1^2+a_1+1)b_1 + a_1^3(a_2^2+a_2+1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2+a_3+1)b_3 = z\big(1-(a_1a_2a_3)^3\big) \end{aligned}$$

En choisissant $z = 0$, on obtient l'égalité $(***)$:

$$(a_1^2+a_1+1)b_1 + a_1^3(a_2^2+a_2+1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2+a_3+1)b_3 = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} p + jq + j^2 r &= -j^2\,\frac{a_3\big[(a_1^2+a_1+1)b_1 + a_1^3(a_2^2+a_2+1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2+a_3+1)b_3\big]}{a_1(1-a_2a_3)(1-a_3a_1)(1-a_1a_2)} \\ &\overset{(***)}{=} -j^2\,\frac{a_3\times 0}{a_1(1-a_2a_3)(1-a_3a_1)(1-a_1a_2)} = 0. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le résultat de la question C.I.3, on en conclut que le triangle PQR est équilatéral direct.

Si l'on échange les rôles de A et de B, ce que l'on vient d'écrire nous assure que si le triangle BAC est équilatéral direct (soit ABC équilatéral indirect), alors RPQ est équilatéral direct, donc PQR est équilatéral indirect.

Dans les deux cas, le théorème de Morley est bien démontré.

Problème 2 : Interpolation polynômiale, méthode des différences finies

La partie I est indépendante des parties suivantes.
En revanche les parties II, III et IV sont liées.

Partie I : Approximation d'une fonction sur un intervalle

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Étude de la fonction f

I.1.1 Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

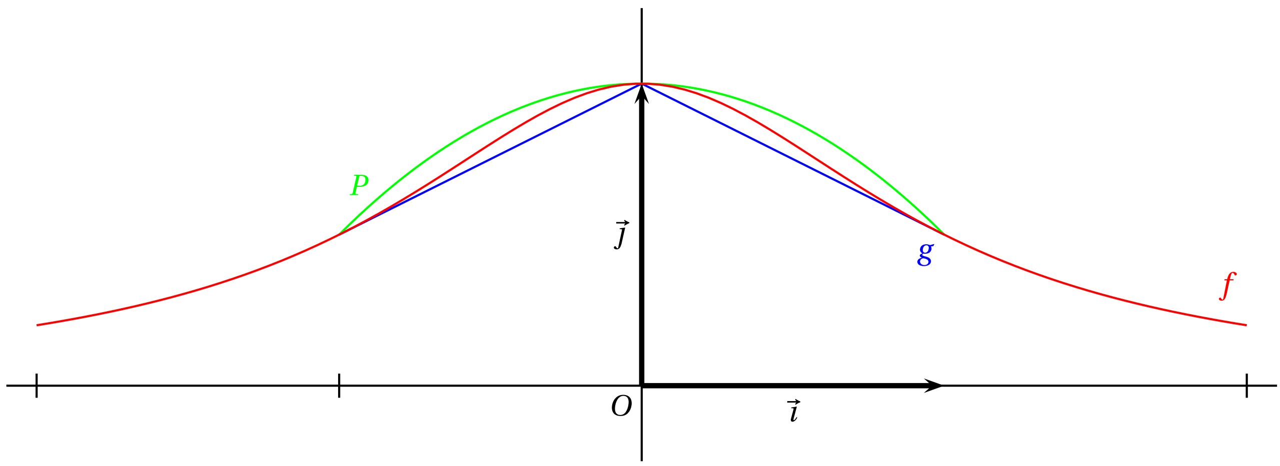
Cette expression nous permet de dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
$\left(1+x^2\right)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0 \\ f(0) = \frac{1}{1+0} &= 1. \end{aligned}$$

I.1.2 Tracer la courbe représentative de la fonction f, avec une unité graphique de 4 cm.



2. Une première approximation

I.2.1 **Déterminer la fonction polynômiale R de degré 1 vérifiant : $R(1)=\dfrac{1}{2}$ et $R(0)=1$.**

Rappelons tout d'abord qu'une fonction polynômiale de degré 1 est représentée par une droite, que le coefficient directeur d'une droite est représenté graphiquement par la variation (positive ou négative) des ordonnées lorsque l'abscisse évolue d'une unité et que l'ordonnée à l'origine d'une droite est l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de la fonction R passe par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,\frac{1}{2})$. Il s'agit donc d'une droite dont le coefficient directeur est égal à $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ et l'ordonnée à l'origine vaut 1. On en déduit que pour tout réel x,

$$R(x)=-\frac{1}{2}x+1.$$

I.2.2 **Déterminer la fonction polynômiale Q de degré 1 vérifiant : $Q(-1)=\dfrac{1}{2}$ et $Q(0)=1$.**

La courbe représentative de la fonction Q passe quant à elle par les points de coordonnées $(-1,\frac{1}{2})$ et $(0,1)$. Il s'agit donc aussi d'une droite dont le coefficient directeur est égal à $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et l'ordonnée à l'origine vaut également 1. On en déduit que pour tout réel x,

$$Q(x)=\frac{1}{2}x+1.$$

I.2.3 **On note g la fonction affine par morceaux, définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par :**
- ⋄ **pour tout réel x de l'intervalle $[-1,0]$, $g(x)=Q(x)$;**
- ⋄ **pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $g(x)=R(x)$.**

Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le même graphique que précédemment.

La courbe représentative de la fonction g est tracée en bleu sur le graphique précédent.

I.2.4 **Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1,1]$, on a : $g(x)\leqslant f(x)$.**

Remarquons que les fonctions f et g sont paires sur l'intervalle $[-1,1]$ (c'est clair d'après le graphique, et les calculs ne prendraient pas beaucoup de temps pour justifier cela rigoureusement). Montrer cette inégalité sur l'intervalle $[-1,1]$ revient donc à la montrer sur l'intervalle $[0,1]$.

Soit alors x un réel de l'intervalle $[0,1]$. On a :

$$\begin{aligned} g(x)-f(x) &= R(x)-f(x)=-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{-x(1+x^2)+2+2x^2-2}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{-x(1+x^2-2x)}{2(1+x^2)}=\frac{\overbrace{-x}^{\leqslant 0}\overbrace{(x-1)^2}^{\geqslant 0}}{\underbrace{2(1+x^2)}_{>0}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $g(x)-f(x)\leqslant 0$, c'est-à-dire que $g(x)\leqslant f(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$. Par parité des fonctions f et g, cette inégalité reste vraie sur l'intervalle $[-1,1]$.

I.2.5 **Calculer l'intégrale $I_g = \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire une minoration de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.**

En utilisant la parité de la fonction g sur l'intervalle $[-1,1]$, on trouve

$$I_g = 2\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 -\frac{1}{2}x+1\,\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2}.$$

On a l'implication suivante, par théorème du cours :

$$\forall\, x \in [-1,1],\ g(x) \leqslant f(x) \qquad \Rightarrow \qquad I_f = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2},$$

et la minoration de l'intégrale I_f est trouvée.

3. Interpolation quadratique

Dans cette partie, on cherche à approcher la fonction f par une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2.

I.3.1 **Montrer que, s'il existe une fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifie les relations suivantes :**

$$P(-1) = f(-1) \quad ; \quad P(0) = f(0) \quad ; \quad P(1) = f(1),$$

alors elle est unique.

Supposons qu'une telle fonction P existe. Alors, étant de degré inférieur ou égal à 2, elle s'écrirait pour tout réel x, $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes réelles. Les informations de l'énoncé nous permettent de donner le système d'équations suivants :

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a_2 - a_1 + a_0 &=& f(-1) \\ a_0 &=& f(0) \\ a_2 + a_1 + a_0 &=& f(1) \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

On sait que ce système admet une solution unique si le déterminant de la première matrice n'est pas nul. Or,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\big(1-(-1)\big) = -2 \neq 0.$$

On en déduit que ce système admet une unique solution, et par conséquent, P est définie de façon unique.

I.3.2 **On considère les fonctions polynômiales L_{-1}, L_0 et L_1 définies pour tout réel x par :**

$$L_{-1}(x) = \frac{1}{2}x(x-1) \quad , \quad L_0(x) = -(x-1)(x+1) \quad \text{et} \quad L_1(x) = \frac{1}{2}x(x+1).$$

Calculer pour tout entier i de $\{-1,0,1\}$ et pour tout entier j de $\{-1,0,1\}$ le réel $L_i(j)$.

Récapitulons ces valeurs dans un tableau :

$j \backslash i$	$i=-1$	$i=0$	$i=1$
$j=-1$	$L_{-1}(-1)=\frac{1}{2}(-1)(-1-1)=1$	$L_0(-1)=-(-1-1)(-1+1)=0$	$L_1(-1)=\frac{1}{2}(-1)(-1+1)=0$
$j=0$	$L_{-1}(0)=\frac{1}{2}\cdot 0(0-1)=0$	$L_0(0)=-(0-1)(0+1)=1$	$L_1(0)=\frac{1}{2}\cdot 0(0+1)=0$
$j=1$	$L_{-1}(1)=\frac{1}{2}\cdot 1(1-1)=0$	$L_0(1)=-(1-1)(1+1)=0$	$L_1(1)=\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)=1$

I.3.3 **On note P la fonction polynômiale définie pour tout nombre réel par :**

$$\boldsymbol{P(x)=f(-1)\,L_{-1}(x)+f(0)\,L_0(x)+f(1)\,L_1(x).}$$

Prouver, sans expliciter la fonction P, que c'est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les relations suivantes :

$$\boldsymbol{P(-1)=f(-1) \quad ; \quad P(0)=f(0) \quad ; \quad P(1)=f(1).}$$

Les trois fonctions L_1, L_2 et L_3 sont des fonctions polynômiales de degré 2. Une combinaison linéaire, telle que P, de fonctions polynômiales de degré 2 est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 (en effet, le terme en x^2 pourrait s'annuler). De plus, grâce à la question précédente, on sait (par le calcul) que

$$\begin{array}{rcll} P(-1) &=& f(-1)\,L_{-1}(-1)+f(0)\,L_0(-1)+f(1)\,L_1(-1) &=& f(-1) \\ P(0) &=& f(-1)\,L_{-1}(0)+f(0)\,L_0(0)+f(1)\,L_1(0) &=& f(0) \\ P(1) &=& f(-1)\,L_{-1}(1)+f(0)\,L_0(1)+f(1)\,L_1(1) &=& f(1). \end{array}$$

I.3.4 **Quel résultat peut-on énoncer à l'aide des questions I.3.1 et I.3.3 ?**

Dans la question I.3.3, on définit une fonction P, on s'assure qu'elle est polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 et qu'elle vérifie les égalités demandées à la question I.3.1. Cette dernière question nous assure alors que <u>cette</u> fonction P est unique.

I.3.5 **Expliciter la fonction P et prouver que pour tout réel x de l'intervalle $[-1,1]$ on a $f(x)\leqslant P(x)$.**

Nous avons deux possibilités pour expliciter la fonction P :

Par le système : Il s'agit en fait de résoudre le système (S). Cela donne

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=f(0)=1 \\ a_2-a_1=f(-1)-1=-\frac{1}{2} \\ a_2+a_1=f(1)-1=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=1 \\ a_2-a_1=-\frac{1}{2} \\ 2a_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=1 \\ a_1=a_2+\frac{1}{2}=0 \\ a_2=-\frac{1}{2} \end{cases},$$

d'où, pour tout réel x, $P(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+1=1-\dfrac{1}{2}x^2$.

Par le calcul : On utilise l'expression de P donnée à la question I.3.3 :

$$\begin{aligned}
P(x) &= f(-1)\,L_{-1}(x)+f(0)\,L_0(x)+f(1)\,L_1(x)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,x(x-1)\right)+1\big(-(x-1)(x+1)\big)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,x(x+1)\right)\\
&= \frac{1}{4}\,x^2-\frac{1}{4}\,x-(x^2-1)+\frac{1}{4}\,x^2+\frac{1}{4}\,x\\
&= -\frac{1}{2}\,x^2+1=1-\frac{1}{2}\,x^2.
\end{aligned}$$

Soit x un réel de l'intervalle $[-1,1]$. Alors

$$f(x)-P(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x^2}{2}=\frac{2-2(1+x^2)+x^2(1+x^2}{1+x^2}=\frac{-2x^2+x^2+x^2}{1+x^2}=\frac{\overbrace{x^2}^{\geqslant 0}\;\overbrace{(x^2-1)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{1+x^2}_{>0}}.$$

En effet, pour tout $x\in[0,1]$, on a $0\leqslant x^2\leqslant 1$ par croissance de la fonction carré sur cet intervalle, et pour tout $x\in[-1,0]$, on a aussi $0\leqslant x^2\leqslant 1$ par décroissance de cette fonction sur cet intervalle. Au total, $-1\leqslant x^2-1\leqslant 0$ pour tout $x\in[-1,1]$. Ceci nous permet d'affirmer que $f(x)-P(x)\leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x)\leqslant P(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[-1,1]$.

I.3.6 **Tracer, toujours dans le même graphique que précédemment, la courbe représentative de la fonction P.**

La courbe représentative de la fonction P est tracée en vert sur le graphique précédent.

I.3.7 **Donner une majoration de l'intégrale $I_f=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.**

Le calcul donne

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} 1-\frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x=2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$$

On a l'implication suivante, par théorème du cours :

$$\forall\,x\in[-1,1],\ f(x)\leqslant P(x)\qquad\Rightarrow\qquad I_f=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{3},$$

et la majoration de l'intégrale I_f est trouvée.

I.3.8 **Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $I_f=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.**

En utilisant les résultats des questions I.2.5 et I.3.7, on trouve les implications suivantes :

$$\frac{3}{2}\leqslant I_f\leqslant\frac{5}{3}\qquad\Rightarrow\qquad 1{,}5\leqslant I_f\leqslant 1{,}7\qquad\Rightarrow\qquad I_f\approx 1{,}6.$$

I.4 **Soient y_0, y_1, y_2 trois nombres réels fixés.**
On considère les fonctions polynômiales L_0, L_1, L_2 définies de la façon suivante : pour chaque entier i compris entre 0 et 2 et pour tout nombre réel x,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(x-j)}{i-j}.$$

En appliquant une méthode analogue à celle mise en œuvre à la question 3, prouver qu'il existe une unique fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout entier i de $\{0,1,2\}$, $P(i) = y_i$.

Supposons qu'une telle fonction P existe. Alors, étant de degré inférieur ou égal à 2, elle s'écrirait pour tout réel x, $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, où a_0, a_1 et a_2 désignent trois réels. Les informations de l'énoncé nous permettent de donner le système d'équations suivants :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lrcl} P(0) = & a_0 & = & y_0 \\ P(1) = & a_2 + a_1 + a_0 & = & y_1 \\ P(2) = & 4a_2 + 2a_1 + a_0 & = & y_2 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On sait que ce système admet une solution unique si le déterminant de la première matrice n'est pas nul. Or,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0.$$

On en déduit que ce système admet une unique solution, et par conséquent, P est définie de façon unique (toujours sous l'hypothèse que P existe). On note ce résultat ($\flat$). Posons maintenant, pour tout réel x,

$$P(x) = y_0\, L_0(x) + y_1\, L_1(x) + y_2\, L_2(x).$$

Le calcul donne alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \left(\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-2}{0-2} \right) + y_1 \left(\frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-2}{1-2} \right) + y_2 \left(\frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-1}{2-1} \right) \\ &= \frac{1}{2}\, y_0 (x-1)(x-2) - y_1\, x(x-2) + \frac{1}{2}\, y_2\, x(x-1) \\ &= \frac{1}{2}\, y_0 (x^2 - 3x + 2) - y_1 (x^2 - 2x) + \frac{1}{2}\, y_2 (x^2 - x) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{2}\, y_0 - y_1 + \frac{1}{2}\, y_2 \right) - x \left(\frac{3}{2}\, y_0 - 2y_1 + \frac{1}{2}\, y_2 \right) + y_0. \end{aligned}$$

P est alors une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à deux (en effet, chacun des coefficients peut être nul en fonction des valeurs attribuées à y_0, y_1 et y_2). De plus,

$$\begin{aligned} P(0) &= y_0 \text{ (immédiat !)} \\ P(1) &= \frac{1}{2}\, y_0 - y_1 + \frac{1}{2}\, y_2 - \left(\frac{3}{2}\, y_0 - 2y_1 + \frac{1}{2}\, y_2 \right) + y_0 = y_1 \\ P(2) &= 4 \left(\frac{1}{2}\, y_0 - y_1 + \frac{1}{2}\, y_2 \right) - 2 \left(\frac{3}{2}\, y_0 - 2y_1 + \frac{1}{2}\, y_2 \right) + y_0 \\ &= 2y_0 - 4y_1 + 2y_2 - 3y_0 + 4y_1 - y_2 + y_0 = y_2. \end{aligned}$$

<u>Faisons un bilan</u> : la fonction P définie ci-dessus vérifie, d'après ce qui précéde, $P(0) = y_0$, $P(1) = y_1$ et $P(2) = y_2$. D'après (b), elle est unique. Enfin, nous avons déterminé qu'il s'agissait d'une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2.

Au final, il existe bien une unique fonction polynômiale P, définie pour tout réel x par $P(x) = y_0\,L_0(x) + y_1\,L_1(x) + y_2\,L_2(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout entier i de $\{0,1,2\}$, $P(i) = y_i$.

Partie II : Méthode de Newton

Soient (y_0, y_1, y_2, y_3) quatre nombres réels fixés.

Dans cette partie, on se propose de déterminer quatre fonctions polynômiales P_0, P_1, P_2, P_3 telles que :
- ⋄ **P_0 est constante et vérifie : $P_0(0) = y_0$.**
- ⋄ **P_1 est de degré inférieur ou égal à 1, $P_1(0) = y_0$ et $P_1(1) = y_1$.**
- ⋄ **P_2 est de degré inférieur ou égal à 2, $P_2(0) = y_0$, $P_2(1) = y_1$ et $P_2(2) = y_2$.**
- ⋄ **P_3 est de degré inférieur ou égal à 3, $P_3(0) = y_0$, $P_3(1) = y_1$, $P_3(2) = y_2$ et $P_3(3) = y_3$.**

Pour tout entier n de $\{0,1,2,3\}$, si la fonction P_n vérifie les propriétés correspondantes ci-dessus, on dira qu'elle vérifie la propriété $(\mathscr{E}_n)$.

On introduit maintenant les notations suivantes :

$\Delta^0 y_0 = y_0$			
	$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$		
$\Delta^0 y_1 = y_1$		$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^0 y_0$	
	$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$\Delta^0 y_2 = y_2$		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^0 y_1$	
	$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$		
$\Delta^0 y_3 = y_3$			

1. Premiers résultats

II.1.1 **Expliciter l'unique fonction polynômiale P_0 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_0)$.**

Puisque la fonction P_0 doit vérifier $(\mathscr{E}_0)$, on a que P_0 est une fonction constante et $P_0(0) = y_0$. L'unique fonction P_0 vérifiant ces propriétés est la fonction constante définie pour tout réel x par $P_0(x) = y_0$.

II.1.2 **Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale P_1 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_1)$ et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :**

$$P_1(x) = \Delta^0\, y_0 + (\Delta^1\, y_0)x.$$

Soit P_1 une fonction polynômiale vérifiant $(\mathscr{E}_1)$. Alors P_1 est de degré inférieur ou égal à 1 et $P_1(0) = y_0$, $P_1(1) = y_1$. Graphiquement, P_1 est représentée par la droite passant par les points de coordonnées $(0, y_0)$ et $(1, y_1)$. L'unicité de P_1 est donc assurée ; il reste maintenant à l'expliciter. Graphiquement, le coefficient directeur de la droite représentant P_1 vaut

$$\frac{y_1 - y_0}{1-0} = y_1 - y_0 = \Delta^1 y_0.$$

Son ordonnée à l'origine est donnée par y_0, qui est aussi égal à $\Delta^0 y_0$. Il s'ensuit que

$$\text{pour tout réel } x,\ P_1(x) = \Delta^0 y_0 + (\Delta^1 y_0)x.$$

Cette forme explicite de P prouve bien que la fonction P existe.

II.1.3 **Calculer $\Delta^2 y_0$ et $\Delta^3 y_0$.**

On a :

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)\\
&= \big((y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)\big) - y_2 + 2y_1 - y_0\\
&= y_3 - 2y_2 + y_1 - y_2 + 2y_1 - y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.
\end{aligned}$$

2. Détermination de la fonction P_2

On suppose jusqu'à la fin de la question II.3.3 que P_2 est l'unique fonction polynômiale vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_2)$, et on note Q_2 la fonction polynômiale définie pour tout réel x par :

$$Q_2(x) = P_2(x) - P_1(x).$$

II.2.1 **Que peut-on dire du degré de Q_2 ?**

Par hypothèse, P_2 vérifie $(\mathscr{E}_2)$, donc P_2 est de degré inférieur ou égal à 2. On a vu à la question II.1.2 que P_1 était une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1. Il vient que $Q_2 = P_2 - P_1$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2.

On peut être plus précis. Supposons un instant que les points $(0, y_0)$, $(1, y_1)$ et $(2, y_2)$ soient alignés. Alors la courbe représentative de P_2 est une droite passant par ces trois, et en particulier par les deux premiers, donc $P_2 = P_1$, et Q_2 est la fonction nulle. Si l'on suppose que le point $(2, y_2)$ n'est pas aligné avec les deux autres, alors P_2 sera nécessairement de degré 2, impliquant que Q_2 aussi.

II.2.2 **Calculer $Q_2(0)$ et $Q_2(1)$. En déduire qu'il existe un réel c_2 tel que $Q_2(x) = c_2\, x(x-1)$.**

On a, puisque les fonctions P_1 et P_2 vérifient respectivement les propriétés $(\mathscr{E}_1)$ et $(\mathscr{E}_2)$,

$$Q_2(0) = P_2(0) - P_1(0) = y_0 - y_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad Q_2(1) = P_2(1) - P_1(1) = y_1 - y_1 = 0.$$

Puisque Q_2 est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 et que 0 et 1 en sont deux racines, on peut donc la factoriser par $x(x-1)$, qui est déjà de degré 2. Il vient, d'après la question précédente, que

pour tout réel x, il existe un réel c_2 (éventuellement nul) tel que $Q_2(x) = c_2\, x(x-1)$.

II.2.3 **Montrer que ce réel c_2 est égal à $\dfrac{\Delta^2 y_0}{2}$.**

D'après la question I.4, il existe une unique fonction polynômiale Q_2 de degré inférieur ou égal à 2 telle que $Q_2(0) = 0$, $Q_2(1) = 0$ et

$$Q_2(2) = P_2(2) - P_1(2) \overset{\text{II.1.2}}{=} y_2 - (\Delta^0\, y_0 + 2\Delta^1\, y_0) = y_2 - \big(y_0 + 2(y_1 - y_0)\big).$$

Or, d'après la question précédente, $Q_2(2) = c_2 \cdot 2(2-1) = 2c_2$. On en tire l'équation

$$2c_2 = y_2 - \big(y_0 + 2(y_1 - y_0)\big) = y_2 - 2y_1 + y_0 \overset{\text{II.1.3}}{=} \Delta^2\, y_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_2 = \frac{\Delta^2\, y_0}{2}.$$

Finalement, pour tout réel x, on a

$$Q_2(x) = \frac{\Delta^2\, y_0}{2}\, x(x-1) = (\Delta^2\, y_0)\frac{x(x-1)}{2}.$$

II.2.4 **Montrer que la fonction polynômiale P_2 vérifiant la propriété ($\mathscr{E}_2$) peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :**

$$\boldsymbol{P_2(x) = \Delta^0\, y_0 + (\Delta^1\, y_0)x + (\Delta^2\, y_0)\frac{x(x-1)}{2}.}$$

Pour tout réel x, on a :

$$Q_2(x) = P_2(x) - P_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_2(x) = P_1(x) + Q_2(x) \overset{\substack{\text{I.1.2}\\ \text{II.2.3}}}{=} \Delta^0\, y_0 + (\Delta^1\, y_0)x + (\Delta^2\, y_0)\frac{x(x-1)}{2}.$$

3. Détermination de la fonction P_3

En s'inspirant de la méthode précédente, justifier qu'il existe une fonction polynômiale P_3 vérifiant la propriété ($\mathscr{E}_3$) et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{P_3(x) = \Delta_0\, y_0 + (\Delta^1\, y_0)x + (\Delta^2\, y_0)\frac{x(x-1)}{2} + (\Delta^3\, y_0)\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.}$$

On admet que cette fonction P_3 est l'unique fonction polynômiale vérifiant la propriété ($\mathscr{E}_3$).

Commençons par montrer l'existence : Soit P_3 une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_3)$. Alors P_3 peut s'écrire pour tout réel x sous la forme $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où a_0, a_1, a_2 et a_3 sont quatre réels. L'énoncé nous amène alors au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} P_3(0) = & a_0 & = & y_0 \\ P_3(1) = & a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = & y_1 \\ P_3(2) = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 & = & y_2 \\ P_3(3) = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 & = & y_3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ q_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 27 & 3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 27 & 9 \end{pmatrix} \\ &= -(12-18) + (24-54) - (72-108) = 6 - 30 + 36 = 12 \neq 0 \end{aligned}$$

Ceci assure non seulement l'existence d'une solution, mais aussi son unicité. Autrement dit, il existe une unique fonction polynômiale P_3 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_3)$.

Explicitons la fonction P_3 : Pour cela, définissons la fonction polynômiale Q_3 pour tout réel x par $Q_3(x) = P_3(x) - P_2(x)$. Puisque P_3 est de dégré inférieur ou égal à 3 et P_2 de degré inférieur ou égal à 2, on en déduit que Q_3 sera de degré inférieur ou égal à 3.

De plus, on détermine facilement que $Q_3(0) = Q_3(1) = Q_3(2) = 0$, autrement dit que 0, 1 et 2 sont les trois racines de Q_3 (on dit bien « les », car il ne peut y en avoir plus en raison du degré de Q_3). On peut ainsi factoriser par $x(x-1)(x-2)$ qui est de degré 3, et il existe donc un réel c_3 tel que pour tout réel x,

$$Q_3(x) = c_3\, x(x-1)(x-2).$$

En particulier, $Q_3(3) = 3c_3(3-1)(3-2) = 3!\, c_3$. Mais on a aussi, à l'aide de l'énoncé et des questions II.2.4 et I.1.3,

$$\begin{aligned} Q_3(3) &= P_3(3) - P_2(3) = y_3 - \Delta^0 y_0 - 3(\Delta^1 y_0) - (\Delta^2 y_0)\frac{3(3-1)}{2} \\ &= y_3 - y_0 - 3(y_1 - y_0) - 3(y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \\ &= \Delta^3 y_0. \end{aligned}$$

Les deux dernières égalités nous amènent à l'équation

$$3!\, c_3 = \Delta^3 y_0 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!},$$

ce qui nous permet finalement d'écrire que, pour tout réel x,

$$Q_3(x) = \frac{\Delta^3 y_0}{3!}\, x(x-1)(x-2) = (\Delta^3 y_0)\,\frac{x(x-1)(x-2)}{3!},$$

ou encore, ce qui est le résultat demandé, pour tout réel x,

$$P_3(x) = P_2(x) + Q_3(x) \overset{\text{II.2.4}}{=} \Delta^0 y_0 + (\Delta^1 y_0)x + (\Delta^2 y_0)\frac{x(x-1)}{2} + (\Delta^3 y_0)\,\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.$$

Plus généralement, on peut prouver le théorème suivant, établi pour $n = 3$ à la question précédente et admis dans la suite de ce problème.
Soit n un entier naturel strictement positif ($n > 0$) et $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ $n+1$ nombres réels.
Il existe une unique fonction polynômiale P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } k \leqslant n, \quad P_n(k) = y_k,$$

et cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_n(x) = \Delta^0 y_0 + (\Delta^1 y_0)x + (\Delta^2 y_0)\frac{x(x-1)}{2} + \cdots + (\Delta^n y_0)\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

où la notation $\Delta^k y_0$ est définie par la relation de récurrence suivante :
- *pour tout entier naturel $j \leqslant n$, $\quad \Delta^0 y_j = y_j$ et*
- *pour tout entier naturel non nul $k \leqslant n$ et pour tout entier naturel $j \leqslant n-k$,*

$$\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j.$$

Partie III : Résolution d'une équation aux différences finies

Soit Q une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel.

Le but de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction polynômiale P telle que $P(0) = \alpha$ et pour tout nombre réel x, $P(x+1) - P(x) = Q(x)$.
On dira d'une telle fonction P qu'elle vérifie la propriété $(C_{Q,\alpha})$.

On rappelle qu'une fonction polynômiale de degré n (n entier $\geqslant 0$) qui admet $(n+1)$ racines distinctes est nulle.

On définit les fonctions polynômiales suivantes, pour tout réel x, par :

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = x, H_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}, H_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \text{ et } H_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}.$$

1. Question préliminaire : cas particulier de la fonction nulle et unicité

III.1.1 Montrer pour tout réel α l'existence et l'unicité d'une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$ dans le cas où Q est la fonction nulle.

Si la fonction Q est nulle, alors la propriété $(C_{Q,\alpha})$ s'écrit plus simplement $P(0) = \alpha$ et pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = 0$, soit $P(x+1) = P(x)$, ou encore $P(x+1) - \alpha = P(x) - \alpha$. Posons alors, pour tout réel x, $R(x) = P(x) - \alpha$. On a alors $R(n) = 0$ pour tout entier n, c'est-à-dire que le polynôme R possède une infinité de racines, prouvant que la fonction polynômiale R ne peut être que la fonction nulle. On en déduit que, pour tout réel x, $P(x) = \alpha$. Cette égalité donne l'existence et l'unicité d'une telle fonction P.

III.1.2 **Montrer que s'il existe une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$, alors elle est unique.**

Supposons qu'il existe une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$. Supposons alors qu'il en existe une autre, notée P'. On note encore P'' la fonction polynômiale définie pour tout réel x par $P''(x) = P(x) - P'(x)$.

Alors $P(0) = P'(0) = \alpha$, d'où $P''(0) = P(0) - P'(0) = 0$, et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) = P'(x+1) - P'(x) = Q(x) &\Leftrightarrow P(x+1) - P'(x+1) = P(x) + P'(x) \\ &\Leftrightarrow P''(x+1) = P''(x) \\ &\Leftrightarrow P''(x+1) - P''(x) = 0. \end{aligned}$$

Il vient que la fonction polynômiale P'' vérifie la propriété $(C_{0,0})$, et d'après la question précédente, P'' est la fonction polynômiale nulle. On en conclut que, pour tout réel x, $P(x) = P'(x)$, et la fonction polynômiale P vérifiant $(C_{Q,\alpha})$ est donc unique.

2. Cas général : analyse du problème

Soit Q une fonction polynômiale non nulle, de degré inférieur ou égal à 3, et α un réel.
On suppose dans cette partie l'existence d'une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$.

III.2.1 **Prouver que P n'est pas une fonction constante.**

Raisonnons par l'absurde et supposons que P soit une fonction constante. Puisque P vérifie en particulier $P(0) = \alpha$, il vient que $P(x) = \alpha$ pour tout réel x. Par suite, toujours pour tout réel x, on a

$$P(x+1) - P(x) = \alpha - \alpha = 0.$$

Si l'on combine cette égalité à la contrainte (imposée par le fait que P vérifie par hypothèse $(C_{Q,\alpha})$) que $P(x+1) - P(x) = Q(x)$, on trouve que $Q(x) = 0$ pour tout réel x, ce qui est absurde vu que Q est une fonction polynômiale non nulle. On en déduit que P n'est pas une fonction constante.

III.2.2 **On note m le degré de la fonction polynômiale P.**
Prouver que le degré de la fonction polynômiale Q vérifiant, pour tout réel x, l'égalité $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ est inférieur ou égal à $m-1$.
En déduire que m est inférieur ou égal à 4.

Puisque P est une fonction polynômiale de degré m, elle peut s'écrire, pour tout réel x, sous la forme $P(x) = a_m x^m + r_{m-1}(x)$, où r_{m-1} désigne une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $m-1$. Il vient que, pour tout réel x,

$$P(x+1) = a_m(x+1)^m + r_{m-1}(x) = a_m x^m + R_{m-1}(x),$$

où R_{m-1} est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $m-1$. On en déduit, toujours pour tout réel x, que

$$Q(x) = P(x-1) - P(x) = R_{m-1}(x) - r_{m-1}(x),$$

donc que Q est de degré inférieur ou égal à $m-1$.

De plus, Q est de degré 3 au plus. Avec le résultat de la question précédente, il vient

$$\deg(Q) \leqslant m-1 \leqslant 3 \quad \Rightarrow \quad m \leqslant 4.$$

III.2.3 **Prouver que P peut s'exprimer de façon unique sous la forme suivante, pour tout réel x :**

$$\boldsymbol{P(x) = a_0\, H_0(x) + a_1\, H_1(x) + a_2\, H_2(x) + a_3\, H_3(x) + a_4\, H_4(x).}$$

On ne demande pas l'expression des coefficients a_k.

Soit Q une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3. Puisqu'on suppose que la fonction polynômiale P vérifiant $(C_{Q,\alpha})$ existe, on a bien la relation $Q(x) = P(x+1) - P(x)$, et d'après la question précédente, P est alors une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 4.

Notons que la question III.1.2 nous assure que cette fonction P est unique. De plus, les fonctions polynômiales H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 forment une base de l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 4 (*en effet, chacune des fonctions polynômiales H_i est exactement de degré i, pour $i \in \{0,1,2,3,4\}$, donc ces 5 fonctions sont indépendantes et forment une famille libre de l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 4 ; de plus, cet espace étant fini, la famille libre en est en fait une base*), qui contient P, ce qui signifie que P peut être écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base. Autrement dit, il existe des réels $a_0, \dots, a_4$ tels que

$$P(x) = a_0\, H_0(x) + a_1\, H_1(x) + a_2\, H_2(x) + a_3\, H_3(x) + a_4\, H_4(x).$$

III.2.4 **Calculer a_0.**

D'après les expressions données dans l'énoncé, on a $H_1(0) = H_2(0) = H_3(0) = H_4(0) = 0$. Par conséquent, $P(0) = a_0\, H_0(0) = a_0$. Mais on a aussi $P(0) = \alpha$ car P vérifie $(C_{Q,\alpha})$, donc $a_0 = \alpha$.

III.2.5 **Vérifier que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 4$, on a pour tout réel x :**

$$\boldsymbol{H_k(x+1) - H_k(x) = H_{k-1}(x).}$$

Distinguons les quatre cas possibles (dans chaque cas, x désigne un réel quelconque) :

$\boldsymbol{k=1}$ **:** On a $H_1(x+1) - H_1(x) = (x+1) - x = 1 = H_0(x)$.

$\boldsymbol{k=2}$ **:** On a

$$H_2(x+1) - H_2(x) = \frac{(x+1)x}{2} - \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x\big((x+1)-(x-1)\big)}{2} = \frac{2x}{2} = x = H_1(x).$$

$\boldsymbol{k=3}$ **:** On a

$$\begin{aligned} H_3(x+1) - H_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{3!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = \frac{x(x-1)\big((x+1)-(x-2)\big)}{3!} \\ &= \frac{3x(x-1)}{3!} = \frac{x(x-1)}{2} = H_2(x). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{k=4}$ **:** On a

$$\begin{aligned}
H_4(x+1)-H_4(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}-\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\\
&= \frac{x(x-1)(x-2)\big((x+1)-(x-3)\big)}{4!}\\
&= \frac{4x(x-1)(x-2)}{4!}=\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=H_3(x).
\end{aligned}$$

III.2.6 **En déduire une expression de $Q(x)$ en fonction des a_k et des $H_k(x)$.**

Grâce au résultat de la question précédente et de la question III.2.3, on a pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
Q(x) &= P(x+1)-P(x)\\
&= a_0\big(H_0(x+1)-H_0(x)\big)+a_1\big(H_1(x+1)-H_1(x)\big)+a_2\big(H_2(x+1)-H_2(x)\big)\\
&\quad +a_3\big(H_3(x+1)-H_3(x)\big)+a_4\big(H_4(x+1)-H_4(x)\big)\\
&= a_0(0)+a_1\,H_0(x)+a_2\,H_1(x)+a_3\,H_2(x)+a_4\,H_3(x)\\
&= a_1\,H_0(x)+a_2\,H_1(x)+a_3\,H_2(x)+a_4\,H_3(x).
\end{aligned}$$

3. Synthèse

Soit Q une fonction polynômiale non nulle de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel. On note, pour tout entier naturel $j \leqslant 3$, $y_j = Q(j)$.

III.3.1 **Justifier qu'il existe une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$ et que cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante pour tout réel x :**

$$P(x)=\alpha+(\Delta^0\,y_0)H_1(x)+(\Delta^1\,y_0)H_2(x)+(\Delta^2\,y_0)H_3(x)+(\Delta^3\,y_0)H_4(x).$$

Existence : Si Q désigne une fonction polynômiale quelconque de degré inférieur ou égal à 3, elle peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments de la base de l'espace de telles fonctions. Or les éléments de cette base sont justement les fonctions polynômiales H_i ($i \in \{0,1,2,3\}$). Autrement dit, toute fonction polunômiale Q de degré inférieur ou égal à 3 peut s'écrire sous la forme, pour tout réel x,

$$Q(x)=a_1\,H_0(x)+a_2\,H_1(x)+a_3\,H_2(x)+a_4\,H_3(x).$$

Dans ce cas, la question III.2.6 nous assure que la fonction P définie pour tout réel x par $P(x) = a_0\,H_0(x)+a_1\,H_1(x)+a_2\,H_2(x)+a_3\,H_3(x)+a_4\,H_4(x)$ vérifie bien la propriété $(C_{Q,\alpha})$, et l'existence est prouvée.

Forme explicite : D'après la question III.2.3, P peut s'exprimer de façon unique sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P(x)=a_0\,H_0(x)+a_1\,H_1(x)+a_2\,H_2(x)+a_3\,H_3(x)+a_4\,H_4(x).$$

D'après la question III.2.6, la fonction polynômiale Q associée peut s'écrire sous la forme, pour tout réel x :

$$Q(x)=a_1\,H_0(x)+a_2\,H_1(x)+a_3\,H_2(x)+a_4\,H_3(x).$$

Nous allons maintenant utiliser le fait que $y_j = Q(j)$ pour tout entier naturel $j \leqslant 3$ afin de calculer les a_k ($k \in \{1,2,3,4\}$, et on sait déjà que $a_0 = \alpha$) :

$$\begin{aligned}
y_0 = Q(0) = a_1\,H_0(0) + a_2\,H_1(0) + a_3\,H_2(0) + a_4\,H_3(0) = a_1 &\quad\Rightarrow\quad a_1 = y_0 = \Delta^0\,y_0\\
y_1 = Q(1) = y_0\,H_0(1) + a_2\,H_1(1) + a_3\,H_2(1) + a_4\,H_3(1) = y_0 + a_2 &\quad\Rightarrow\quad a_2 = y_1 - y_0 = \Delta^1\,y_0\\
y_2 = Q(2) = y_0 + 2(y_1 - y_0) + a_3 + 0 &\quad\Rightarrow\quad a_3 = y_2 - 2y_1 + y_0 \overset{\text{I.1.3}}{=} \Delta^2\,y_0\\
y_3 = Q(3) = y_0 + 3(y_1 - y_0) + 3(y_2 - 2y_1 + y_0) + a_4 &\quad\Rightarrow\quad a_4 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \overset{\text{I.1.3}}{=} \Delta^3\,y_0.
\end{aligned}$$

L'expression de P ci-dessus s'écrit alors, pour tout réel x,

$$P(x) = \alpha + (\Delta^0\,y_0)H_1(x) + (\Delta^1\,y_0)H_2(x) + (\Delta^2\,y_0)H_3(x) + (\Delta^3\,y_0)H_4(x).$$

III.3.2 **En déduire qu'il existe une unique fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$.**

On vient à l'instant de prouver que la fonction P définie dans la question précédente vérifiait $(C_{Q,\alpha})$. L'unicité est alors assurée par la question III.1.2.

Partie IV : Somme des puissante 3$^{\text{es}}$ des k premiers entiers

Le but de cette partie est de donner une formule, donnant pour tout entier naturel non nul k, la somme : $\sigma_k = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$ (avec par convention $\sigma_0 = 0$).
Précisément on pose $\sigma_0 = 0$ et, pour tout entier naturel k, $\sigma_{k+1} = \sigma_k + (k+1)^3$, ce qui est une définition par récurrence de la suite $(\sigma_k)_{k\geqslant 0}$.

On note Q la fonction polynômiale définie par $Q(x) = (x+1)^3$, et pour tout entier naturel $j \leqslant 3$, on note $y_j = Q(j)$.
On note P la fonction polynômiale qui vérifie :

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout réel } x,\ P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

IV.1 **Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a $\sigma_k = P(k)$.**

Soit $\mathscr{P}_k$ la propriété « $\sigma_k = P(k)$ » définie pour tout entier $k \geqslant 1$. Procédons par récurrence sur cet entier :

Initialisation : Lorsque $k = 1$, on a
- ⋄ d'une part, $P(1) - P(0) = Q(0) \Rightarrow P(1) = P(0) + Q(0) = 0 + 1 = 1$,
- ⋄ d'autre part, $\sigma_1 = \sigma_0 + (0+1)^3 = 0 + 1^3 = 1$.

On a donc $\sigma_1 = P(1)$, et la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie, de sorte que la récurrence est initialisée au rang $k = 1$.

Hérédité : Soient $k \geqslant 1$ et $m \leqslant k$ deux entiers quelconques. Supposons la propriété $\mathscr{P}_m$ vraie, c'est-à-dire que $\sigma_m = P(m)$ (on note cette égalité (HR)), et montrons que $\mathscr{P}_{m+1}$ est encore vraie, c'est-à-dire montrons que $\sigma_{m+1} = P(m+1)$. On a :

$$\begin{aligned} & \sigma_{m+1} \overset{\text{déf.}}{=} \sigma_m + (m+1)^3 \overset{\text{(HR)}}{=} P(m) + Q(m) \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma_{m+1} - P(m) = Q(m) \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma_{m+1} = P(m+1), \end{aligned}$$

ce qui est $\mathscr{P}_{m+1}$. La dernière équivalence s'explique par le fait que P vérifie pour tout réel x (donc ne particulier $x = m$), $P(x+1) - P(x) = Q(x)$. Ainsi, $\mathscr{P}_{m+1}$ est vraie pour tout entier $m \leqslant k$.

<u>Faisons un bilan</u> : On a $\mathscr{P}_1$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\mathscr{P}_k \Rightarrow \mathscr{P}_{k+1}$. D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout entier $k \geqslant 1$, d'où le résultat.

IV.2 **En déduire une expression de σ_k utilisant la notation $\Delta^k y_0$.**

En combinant le résultat de la question précédente avec l'égalité de la question III.3.1 appliquée à $x = k$, on trouve

$$\sigma_k = P(k) = \alpha + (\Delta^0 y_0) H_1(k) + (\Delta^1 y_0) H_2(k) + (\Delta^2 y_0) H_3(k) + (\Delta^3 y_0) H_4(k).$$

De plus, l'hypothèse $P(0) = 0$ implique que P vérifie la propriété $(C_{Q,0})$, donc $\alpha = 0$ et finalement,

$$\sigma_k = (\Delta^0 y_0) H_1(k) + (\Delta^1 y_0) H_2(k) + (\Delta^2 y_0) H_3(k) + (\Delta^3 y_0) H_4(k).$$

IV.3 **Calculer $\Delta^k y_0$ pour tout k compris entre 0 et 3.**

Rappelons que pour tout entier naturel $j \leqslant 3$, on a $y_j = Q(j) = (j+1)^3$, donc

$$y_0 = (0+1)^3 = 1 \quad ; \quad y_1 = (1+1)^3 = 8 \quad ; \quad y_2 = (2+1)^3 = 27 \quad \text{et} \quad y_3 = (3+1)^3 = 64,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_0 &= y_0 = 1, \\ \Delta^1 y_0 &= y_1 - y_0 = 8 - 1 = 7, \\ \Delta^2 y_0 &\overset{\text{I.1.3}}{=} y_2 - 2y_1 + y_0 = 27 - 16 + 1 = 12, \\ \Delta^3 y_0 &\overset{\text{I.1.3}}{=} y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 64 - 81 + 24 - 1 = 6. \end{aligned}$$

IV.4 **Donner une expression simple de la somme σ_k en détaillant les calculs.**

Il ne reste plus qu'à injecter ces résultats dans l'égalité trouvée à la question IV.2 : pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= (\Delta^0 y_0) H_1(k) + (\Delta^1 y_0) H_2(k) + (\Delta^2 y_0) H_3(k) + (\Delta^3 y_0) H_4(k) \\
&= k + 7\frac{k(k-1)}{2} + 12\frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + 6\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \\
&= k + \frac{7}{2}k(k-1) + 2k(k-1)(k-2) + \frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3) \\
&= \frac{4k + 14k^2 - 14k + 8k^3 - 24k^2 + 16k + (k^2-k)(k^2-5k+6)}{4} \\
&= \frac{8k^3 - 10k^2 + 6k + k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k}{4} \\
&= \frac{k^4 - 2k^3 + k^2}{4} = \frac{k^2(k^2 - 2k + 1)}{4} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Remarque :
Soit $k \geqslant 1$ un entier. Si l'on note S_k la somme $\sum_{n=1}^{k} n$, on aura :

$$
\begin{aligned}
S_k &= 1 + 2 + \cdots + (k-1) + k \\
S_k &= k + (k-1) + \cdots + 2 + 1 \\
\Rightarrow \quad 2S_k &= \underbrace{(k+1) + (k+1) + \cdots + (k+1) + (k+1)}_{k \text{ fois}} \\
\Rightarrow \quad S_k &= \frac{k(k+1)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on peut écrire que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{k} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{k} n\right)^2.$$