CAPES externe 2007 de Mathématiques

Deuxième composition : CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie – *Isocrate*

Introduction

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel :

$$\forall\, x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et on définit la norme d'un vecteur $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul, on note s_a la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad s_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.$$

On dit qu'une partie R de $\mathbb{R}^n$ est un *système de racines* dans $\mathbb{R}^n$ si elle vérifie les conditions suivantes :

– la partie R est finie, ne contient pas 0 et engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$;
– pour tout $\alpha \in R$, $s_\alpha(R) = R$ (en particulier, $-\alpha \in R$) ;
– pour tous $\alpha, \beta \in R$, $n_{\alpha,\beta} = 2\dfrac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$;
– pour tout $\alpha \in R$, les seuls éléments de R proportionnels à α sont α et $-\alpha$.

Les coefficients $n_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in R)$ sont appelés les *coefficients de structure* du système de racines R.

On dit que deux systèmes de racines R et R' sont des *systèmes de racines isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\varphi(R) = R' \qquad \text{et} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in R, \quad n_{\varphi(\alpha),\varphi(\beta)} = n_{\alpha,\beta}.$$

Dans la partie I, on étudie les systèmes de racines du plan. Cette partie permet de se familiariser avec cette notion et d'avoir des exemples sur lesquels s'appuyer pour la suite du problème. Puis dans la partie II, on étudie des relations d'ordre total compatibles avec la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Cette partie est indépendante de la partie I. Ces relations d'ordre permettront, dans la partie III, d'extraire d'un système de racines une base de $\mathbb{R}^n$. Même si le fait d'avoir traité la partie I permet de mieux aborder celle-ci, le seul résultat utile est rappelé en début de la partie III et pourra être admis. Seule la dernière question dépend de la partie I. La partie IV est consacrée à l'étude d'un groupe engendré par les symétries associées à un système de racines. On montrera que les symétries associées à une base suffisent à engendrer le groupe. Pour cela, on utilisera des résultats établis dans la partie III. Ensuite, dans la partie V, on étudiera les groupes diédraux et on montrera qu'ils sont engendrés par deux éléments d'ordre 2. Cette partie est indépendante de ce qui précède (sauf pour traiter la dernière question). Dans la partie VI, on associe à un système de racines un ensemble de parties connexes de $\mathbb{R}^n$ sur lesquelles agit le groupe défini dans la partie IV. On montre ensuite, par des arguments de dualité et de topologie, que toutes les bases extraites du système de racines sont en bijection avec ces connexes. Cette partie se finit en montrant que le groupe agit simplement transitivement sur l'ensemble de ces connexes et sur l'ensemble des bases du système de racines.

1 Systèmes de racines dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on supposera $n=2$. Soit R un système de racines de $\mathbb{R}^2$. Pour $\alpha,\beta\in R$, on note $\theta_{\alpha,\beta}$ l'angle géométrique entre α et β, i.e. le nombre réel compris entre 0 et π défini par

$$\cos(\theta_{\alpha,\beta})=\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}.$$

1. Soient $\alpha,\beta\in R$.

(a) Montrer que $n_{\alpha,\beta}\,n_{\beta,\alpha}=4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$.

Remarquons que la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ entraîne celle du produit scalaire. Autrement dit, pour tous $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$. On a alors

$$n_{\alpha,\beta}\,n_{\beta,\alpha}=2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\cdot2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}=4\frac{\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\|\alpha\|^2\,\|\beta\|^2}=4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta}).$$

(b) En déduire les valeurs possibles de $\theta_{\alpha,\beta}$.

Puisque $\alpha,\beta\in R$, on a $n_{\alpha,\beta},n_{\beta,\alpha}\in\mathbb{Z}$, donc $4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})\in\mathbb{Z}$. Or $0\leqslant\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})\leqslant1$, ce qui implique que $4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})\in\{0,\dots,4\}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
&4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})\in\{0,\dots,4\}\\
\Leftrightarrow\quad&\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})\in\left\{0,\frac14,\frac12,\frac34,1\right\}\\
\Leftrightarrow\quad&\cos(\theta_{\alpha,\beta})\in\left\{-1,-\frac{\sqrt3}{2},-\frac{\sqrt2}{2},-\frac12,0,\frac12,\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt3}{2},1\right\}\\
\Leftrightarrow\quad&\theta_{\alpha,\beta}\in\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\pi\right\}.
\end{aligned}$$

La dernière équivalence provient du fait que $\theta_{\alpha,\beta}$ se trouve par définition dans $[0,\pi]$.

(c) Montrer que le couple $(n_{\alpha,\beta},n_{\beta,\alpha})$ ne peut pas prendre les valeurs $(1,4)$, $(4,1)$, $(-1,-4)$ et $(-4,-1)$.

Supposons que $(n_{\alpha,\beta},n_{\beta,\alpha})=(1,4)$ ou $(n_{\alpha,\beta},n_{\beta,\alpha})=(-1,-4)$.

◇ Nous avons d'une part que

$$n_{\alpha,\beta}=\pm1\Leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle=\pm\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}\quad\text{et}\quad n_{\beta,\alpha}=\pm4\Leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle=\pm2\langle\beta,\beta\rangle$$

impliquent

$$\langle\alpha,\alpha\rangle=4\langle\beta,\beta\rangle\Leftrightarrow\|\alpha\|^2=4\|\beta\|^2\Leftrightarrow\|\alpha\|=2\|\beta\|.\quad(\flat)$$

◇ D'autre part, nous avons que $n_{\alpha,\beta}=\pm1$ et $n_{\beta,\alpha}=\pm4$ impliquent que

$$\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})=1\Rightarrow\cos(\theta_{\alpha,\beta})=\pm1\overset{\theta_{\alpha,\beta}\in[0,\pi]}{\Rightarrow}\theta_{\alpha,\beta}=0\text{ ou }\theta_{\alpha,\beta}=\pi.\quad(\sharp)$$

($\flat$) et ($\sharp$) impliquent que β est proportionnel à α, mais de norme différente : cela contredit le fait que les seuls éléments de R proportionnels à α sont α et $-\alpha$. Donc il n'est pas possible que l'ont ait $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) = (1,4)$ ou $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) = (-1,-4)$.

En échangeant les rôles de α et β, on montre de manière analogue que $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) \neq (4,1)$ et $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) \neq (-4,-1)$.

(d) **Pour $\theta_{\alpha,\beta} \neq \frac{\pi}{2}$, montrer que $\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}}$ et en déduire les valeurs possibles du rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$.**

Remarquons que

$$\theta_{\alpha,\beta} \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n_{\alpha,\beta}\, n_{\beta,\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow n_{\alpha,\beta} \neq 0 \text{ et } n_{\beta,\alpha} \neq 0,$$

donc le quotient $n_{\beta,\alpha}/n_{\alpha,\beta}$ est bien défini. On a alors :

$$\frac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}} = \frac{2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}}{2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}} = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\beta\|^2} \cdot \frac{\|\alpha\|^2}{\langle\alpha,\beta\rangle} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}.$$

On en déduit alors les valeurs possibles du rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ grâce au tableau 1 page suivante. La dernière ligne s'explique par le fait que si $\alpha, \beta \neq 0$, alors

$$n_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle = 0 \Leftrightarrow 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = 0 \Leftrightarrow n_{\beta,\alpha} = 0.$$

(e) **En supposant $\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|$, présenter sous forme d'un tableau, les différentes valeurs de $n_{\alpha,\beta}$, $n_{\beta,\alpha}$, $\theta_{\alpha,\beta}$ et $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$.**

On suppose maintenant (quitte à échanger α et β) que $\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|$. On fera bien attention au fait qu'on demande maintenant (en particulier) la valeur du quotient $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$, et non son inverse. Il suffit donc de reprendre le tableau ci-dessous, en supprimant les lignes où $n_{\beta,\alpha} > n_{\alpha,\beta}$, donnant le tableau 2.

$\theta_{\alpha,\beta}$	$4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$	$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$\dfrac{\Vert\alpha\Vert}{\Vert\beta\Vert}=\sqrt{\dfrac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}}}$
$0, \pi$	4	-2	-2	1
$0, \pi$	4	2	2	1
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	-1	-3	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	1	3	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	-3	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	3	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	-1	-2	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	1	2	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	-2	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	1	-1	-1	1
$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	1	1	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	non déterminé

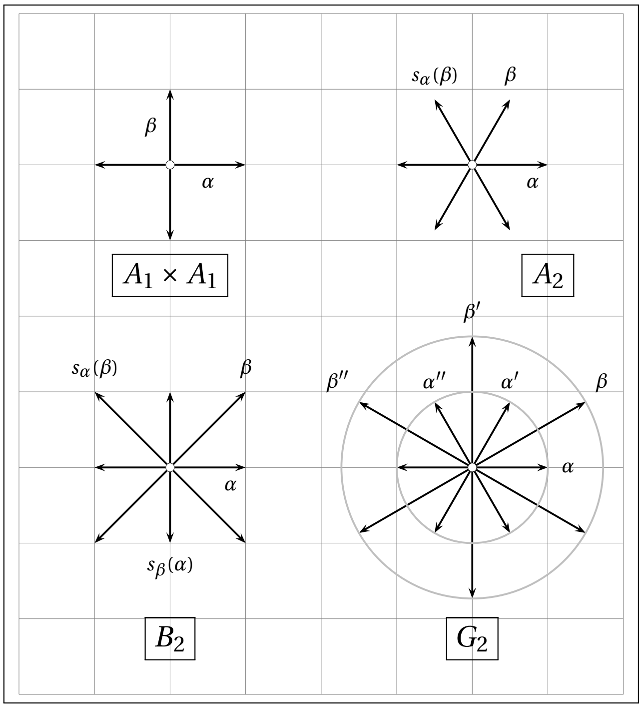
TAB. 1 – Valeurs possibles du rapport $\dfrac{\Vert\alpha\Vert}{\Vert\beta\Vert}$

$\theta_{\alpha,\beta}$	$4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$	$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$\dfrac{\Vert\beta\Vert}{\Vert\alpha\Vert}$
$0, \pi$	4	± 2	± 2	1
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	± 3	± 1	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	± 2	± 1	$\sqrt{2}$
$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	1	± 1	± 1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	non déterminé

TAB. 2 – Valeurs possibles de $n_{\alpha,\beta}$, $n_{\beta,\alpha}$, $\theta_{\alpha,\beta}$ et $\dfrac{\Vert\beta\Vert}{\Vert\alpha\Vert}$

2. **Dessiner les figures correspondant à quatre systèmes de racines dans $\mathbb{R}^2$ non deux à deux isomorphes (dans chacun des cas, l'une des racines devra être $(1,0)$). On les ordonnera dans l'ordre croissant du nombre de racines et on les appellera $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 et G_2 (ayant respectivement 4, 6, 8 et 12 racines).**

Posons $\alpha = (0,1)$. Avant de donner quelques explications sur les constructions des systèmes de racines, voici les dessins correspondants :



Comme le dit l'énoncé, $\alpha \in R \Rightarrow -\alpha \in R$ et $\alpha, \beta \in R \Rightarrow s_\alpha(\beta) \in R$. Cela nous simplifiera un peu le travail de recherche… Notons encore que ces systèmes sont chacun de cardinal différent, donc ils sont bien non isomorphes deux à deux.

$A_1 \times A_1$: On considère $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/2$. Tout vecteur β orthogonal à α vérifie les conditions requises pour que $\beta \in R$. Les deux autres vecteurs s'obtiennent en prennant les opposés de ceux-ci.

A_2 : On considère $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/3$. On a alors (par exemple) $n_{\alpha,\beta} = 1$ et $n_{\beta,\alpha} = 1$. Ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} 2\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 1 \\ 2\dfrac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta\beta\rangle} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\langle\alpha,\beta\rangle = \|\alpha\|^2 \\ 2\langle\alpha,\beta\rangle = \|\beta\|^2 \end{array}\right. \Rightarrow \|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\beta\| = \|\alpha\| = 1.$$

On peut alors construire le vecteur β, puis le vecteur $s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha$, et les trois manquant sont donc $-\alpha, -\beta$ et $-s_\alpha(\beta)$.

B_2 : On considère $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/4$. On a alors (par exemple) $n_{\alpha,\beta} = 2$ et $n_{\beta,\alpha} = 1$. Ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} 2\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2 \\ 2\dfrac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta\beta\rangle} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\langle\alpha,\beta\rangle = 2\|\alpha\|^2 \\ 2\langle\alpha,\beta\rangle = \|\beta\|^2 \end{array}\right. \Rightarrow \|\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\| = \sqrt{2}.$$

On peut alors construire le vecteur β, puis les vecteurs $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha$ et $s_\beta(\alpha) = \alpha - \beta$, et les quatre manquants sont alors $-\alpha, -\beta, -s_\alpha(\beta)$ et $-s_\beta(\alpha)$.

***G*$_2$:** On considère $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/4$. On a alors (par exemple) $n_{\alpha,\beta} = 3$ et $n_{\beta,\alpha} = 1$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} 2\dfrac{\langle \alpha,\beta\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} = 3 \\ 2\dfrac{\langle \beta,\alpha\rangle}{\langle \beta\beta\rangle} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\langle \alpha,\beta\rangle = 3\|\alpha\|^2 \\ 2\langle \alpha,\beta\rangle = \dfrac{\|\beta\|^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \|\beta\|^2 = 3\|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\| = \sqrt{3}.$$

Ceci nous donne le vecteur β. On construit alors α', β' par rotation de α et β, d'angle $\pi/3$, ainsi que α'', β'' par rotation de α et β d'angle $2\pi/3$ (de sorte que chaque couple de vecteurs forme un angle multiple de $\pi/6$). Les six vecteur manquants s'obtiennent toujours en prenant les opposés de α et des cinq autres vecteurs construits à l'instant.

3. **Soit $\boldsymbol{\alpha}$ une racine de $\boldsymbol{R}$ de norme minimale. Supposons qu'il existe une racine $\boldsymbol{\beta}$ de $\boldsymbol{R}$ non proportionnelle et non orthogonale à $\boldsymbol{\alpha}$. Quitte à transformer $\boldsymbol{R}$ par une rotation, une homothétie ou une symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\times\{\mathbf{0}\}$ (qui laisse invariants les coefficients de structure du système de racines), on peut supposer $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{1},\mathbf{0})$ et $\boldsymbol{\beta}$ de deuxième coordonnée strictement positive.**

   (a) **Montrer que $\boldsymbol{n_{\alpha,\beta}} \neq \mathbf{0}$. En posant $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{s_\alpha(\beta)}$, montrer que $\boldsymbol{n_{\alpha,\gamma}} = -\boldsymbol{n_{\alpha,\beta}}$.**

   On suppose $\alpha = (1,0)$. Puisque β est une racine de R non orthogonale à α, le produit scalaire de α et β n'est pas nul, impliquant directement que $n_{\alpha,\beta} \neq 0$. Posons alors $\gamma = s_\alpha(\beta)$, et montrons que $n_{\alpha,\gamma} = -n_{\alpha,\beta}$. On a

$$\begin{aligned} n_{\alpha,\gamma} &= 2\frac{\langle \alpha,\gamma\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} = 2\frac{\langle \alpha,\beta - n_{\alpha,\beta}\,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} = \frac{2\langle \alpha,\beta\rangle - 2\,n_{\alpha,\gamma}\langle \alpha,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \\ &= 2\frac{\langle \alpha,\beta\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} - 2\,n_{\alpha,\gamma} = n_{\alpha,\beta} - 2\,n_{\alpha,\beta} = -n_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

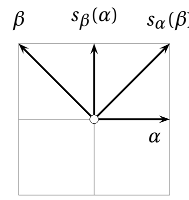
   Quitte à remplacer $\boldsymbol{\alpha}$ par $\boldsymbol{s_\alpha(\beta)}$, on supposera $\boldsymbol{n_{\alpha,\beta}} < \mathbf{0}$ et d'après le tableau des valeurs de $\boldsymbol{\theta_{\alpha,\beta}}$, trois cas peuvent se présenter.

   Dans la suite de cette question 3, on supposera $n_{\alpha,\beta} < 0$. De plus, puisqu'une symétrie, une homothétie ou une rotation laissent invariants les coefficients de structure du système de racines, on supposera aussi que $\alpha = (1,0)$.

   (b) **cas 1 : Supposons que $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\mathbf{2}}\|\boldsymbol{\alpha}\|$ et $\boldsymbol{\theta_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}}$. Calculer $\boldsymbol{s_\alpha(\beta)}$ et $\boldsymbol{s_\beta(\alpha)}$ et représenter graphiquement les quatre racines $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{s_\alpha(\beta)}$ et $\boldsymbol{s_\beta(\alpha)}$. En déduire que $\boldsymbol{B_2} \subset \boldsymbol{R}$. En supposant qu'il existe $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{B_2}$, montrer qu'alors l'angle entre $\boldsymbol{\gamma}$ et une racine de $\boldsymbol{B_2}$ est inférieur à $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$. En conclure que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B_2}$.**

   On a $\|\beta\| = \sqrt{2}$ et $\beta = (-1,1)$. De plus, d'après le tableau, on sait que $n_{\alpha,\beta} = -2$ et $n_{\beta,\alpha} = -1$. Par conséquent,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = 2\alpha + \beta = (1,1) \qquad \text{et} \qquad s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha}\beta = \alpha + \beta = (0,1).$$



   On retrouve au moins les huit vecteurs (les quatre non dessinés sont les opposés de ceux qui le sont, à savoir $-\alpha$, $-\beta$, $-s_\alpha(\beta)$ et $-s_\beta(\alpha)$) de B_2, donc

$$B_2 \subset R.$$

Soit $\gamma \in R$. Supposons alors $\gamma \notin B_2$. On a déjà que

$$\theta_{\alpha,\gamma} \notin \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\} \overset{\text{I.1.b}}{\Rightarrow} \quad \theta_{\alpha,\gamma} \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\},$$

car sinon $\gamma \in B_2$. Séparons alors les différents cas :

- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{8}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{\pi}{3}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{8}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{2\pi}{3}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{8}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{5\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{8}$;

Ceci contredit le fait que l'angle géométrique entre deux racines distinctes est d'au moins $\pi/6$ (partie I, 1.b). On en déduit que $\gamma \in B_2$, donc $R \subset B_2$, et puisqu'on a déjà démontré que $B_2 \subset R$, il vient que $R = B_2$.

(c) **cas 2 : Supposons que $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}\|$ et $\boldsymbol{\theta_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}$. Calculer**

$$\boldsymbol{s_\alpha(\beta)}, \qquad \boldsymbol{s_\beta(\alpha)}, \qquad \boldsymbol{s_\beta \circ s_\alpha(\beta)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)}$$

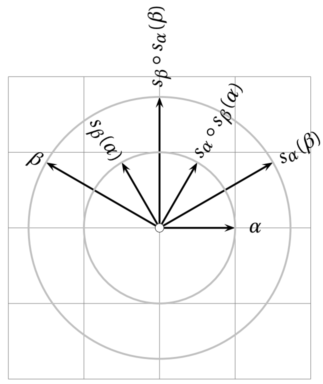
et les représenter graphiquement ainsi que $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$. En déduire que $\boldsymbol{G_2 \in R}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\boldsymbol{R = G_2}$.

On a $\|\beta\| = \sqrt{3}$ et $\beta = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De plus, d'après le tableau, on sait que $n_{\alpha,\beta} = -3$ et $n_{\beta,\alpha} = -1$. Par conséquent,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = 3\alpha + \beta = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha}\beta = \alpha + \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

De même, après quelques calculs, et en utilisant les propriétés du produit scalaire, on détermine facilement que

$$s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) = 2\alpha + \beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad s_\beta \circ s_\alpha(\beta) = 3\alpha + 2\beta = \left(0, \sqrt{3}\right).$$



On retrouve au moins les douze vecteurs (les six non dessinés sont les opposés de ceux qui le sont, à savoir $-\alpha$, $-\beta$, $-s_\alpha(\beta)$, $-s_\beta(\alpha)$, $-s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)$ et $-s_\beta \circ s_\alpha(\beta)$) de G_2, donc

$$G_2 \subset R.$$

Soit $\gamma \in R$. Supposons alors que $\gamma \notin G_2$. On aurait alors automatiquement que

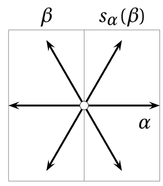
$$\min_{\alpha \in G_2} \theta_{\alpha,\gamma} < \frac{\pi}{6},$$

ce qui est impossible puisque l'angle géométrique entre deux racines distinctes de R est d'au moins $\pi/6$ (partie I, 1.b). On en déduit que $\gamma \in G_2$, donc $R \subset G_2$, et puisqu'on a déjà démontré que $G_2 \subset R$, il vient que $R = G_2$.

(d) **cas 3 : supposons que $\|\beta\| = \|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer $s_\alpha(\beta)$ et en déduire que $A_2 \subset R$. Supposons que $R \neq A_2$, soit $\gamma \in R\backslash A_2$. Montrer que l'angle entre γ et deux vecteurs adjacents de A_2 est égal à $\frac{\pi}{6}$. Quitte à réindexer les éléments de A_2, montrer qu'on peut supposer $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{5\pi}{6}$. En déduire que $R = G_2$.**

On a $\|\beta\| = 1$ et $\beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De plus, d'après le tableau, on sait que $n_{\alpha,\beta} = -1$. Par conséquent,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = \alpha + \beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



On retrouve au moins les six vecteurs (les deux non dessinés sont les opposés de ceux qui le sont, à savoir $-\alpha$, $-\beta$ et $-s_\alpha(\beta)$) de A_2, donc

$$A_2 \subset R.$$

Supposons alors $R \neq A_2$, et supposons alors $\gamma \in R\backslash A_2$. On a déjà que

$$\theta_{\alpha,\gamma} \notin \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\alpha,\gamma} \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\},$$

car sinon $\gamma \in A_2$. Séparons alors les différents cas :

- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,\alpha} = \theta_{\gamma,\beta} = \dfrac{\pi}{6}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{\pi}{4}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{8} \to$ impossible ;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{\pi}{2}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \dfrac{\pi}{6}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{3\pi}{4}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{8} \to$ impossible ;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \dfrac{5\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \theta_{\gamma,-\alpha} = \dfrac{\pi}{6}$;

On en déduit que l'angle géométrique entre γ et deux vecteurs adjacents de A_2 est toujours égal à $\pi/6$. Puisqu'une rotation ne modifie pas les coefficients de structure du système de racines, on peut supposer que $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{5\pi}{6}$. D'après le tableau de la question 1.e (partie I), on sait que $\|\gamma\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$. Le cas précédent permet donc de conclure que $R = G_2$.

4. **En conclure qu'à isomorphisme près, il n'y a que quatre systèmes de racines dans $\mathbb{R}^2$.**

Considérons un système R de racine de $\mathbb{R}^2$, possédant une racine de norme minimale notée α, et distinguons deux cas :

Il existe une racine β de R non proportionnelle et non orthogonale à α : Dans ce cas, le travail effectué dans la question précédente permet d'affirmer que R est isomorphe à A_2, B_2 ou G_2 selon l'angle $\theta_{\alpha,\beta}$.

Il existe une racine $\boldsymbol{\beta}$ de $\boldsymbol{R}$ proportionnelle ou orthogonale à $\boldsymbol{\alpha}$: Dans ce cas, R engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ par définition même du système de racine, donc nécessairement β est orthogonale à α. Les vecteurs de R sont alors α, β et leurs opposés.

Puisqu'une rotation, une homothétie ou une symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\times\{0\}$ laisse invariants les coefficients de structure de R, on peut supposer que $\alpha = (1,0)$. Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\|\beta\|} \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que φ est un isomorphisme qui envoie R sur $A_1 \times A_1$. De plus, par orthogonalité,

$$n_{\varphi(\alpha),\varphi(\beta)} = n_{\alpha,\beta}.$$

On en déduit que R est isomorphe à $A_1 \times A_1$.

Au final, il n'y a que quatre systèmes de racines dans $\mathbb{R}^2$, à isomorphisme près : $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 et G_2.

2 Relations d'ordre dans $\mathbb{R}^n$

Une relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathbb{R}^n$ est dite compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n, x \preceq y \Rightarrow x + z \preceq y + z$;
- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, x \preceq y \Rightarrow \lambda x \preceq \lambda y$.

La relation d'ordre strict associée est notée $\prec$.

1. **Soit $\preceq$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel.**

   (a) **Montrer que**
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^-, \qquad x \preceq y \Rightarrow \lambda y \preceq \lambda x.$$

   Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Alors

   $$\begin{aligned} x \preceq y &\Leftrightarrow x - (x+y) \preceq y - (x+y) \overset{-\lambda\in\mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} (-\lambda)(-y) \preceq (-\lambda)(-x) \\ &\Leftrightarrow \lambda y \preceq \lambda x. \end{aligned}$$

   (b) **Soit $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$ (le groupe linéaire de $\mathbb{R}^n$). On définit une relation par : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $x \preceq' y$ si $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$. Montrer que $\preceq'$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel.**

   Soient encore $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

   réflexivité : $x \preceq x$ car $\preceq$ est une relation d'ordre. Donc $\varphi(x) \preceq \varphi(x)$. C'est exactement la définition de $x \preceq' x$, donc $\preceq'$ est réflexive.

antisymétrie : Supposons que $x \preceq' y$ et $y \preceq' x$. Alors $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ et $\varphi(y) \preceq \varphi(x)$. Puisque $\preceq$ est antisymétrique, il vient que $\varphi(x) = \varphi(y)$, d'où $x = y$ par injectivité de φ.

transitivité : Supposons que $x \preceq' y$ et $y \preceq' z$. Alors $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ et $\varphi(y) \preceq \varphi(z)$. Puisque $\preceq$ est transitive, il vient que $\varphi(x) \preceq \varphi(z)$, c'est-à-dire $x \preceq' z$.

totalité : Puisque $\preceq$ est totale, on a nécessairement $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Puisque φ est linéaire, il vient que $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ ou $\varphi(y) \preceq \varphi(x)$, d'où le résultat : $x \preceq' y$ ou $y \preceq' x$.

compatible avec la structure d'espace vectoriel : On utilisera la linéarité de φ et la compatibilité de $\preceq$ avec la structure d'espace vectoriel :
◇ Montrons que $x \preceq' y \Rightarrow x + z \preceq' y + z$:

$$\begin{aligned} x \preceq' y &\Rightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(z) \preceq \varphi(y) + \varphi(z) \\ &\Rightarrow \varphi(x+z) \preceq \varphi(y+z) \Rightarrow x + z \preceq' y + z. \end{aligned}$$

◇ Montrons que $x \preceq' y \Rightarrow \lambda x \preceq' \lambda y$:

$$\begin{aligned} x \preceq' y &\Rightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y) \Rightarrow \lambda\varphi(x) \preceq \lambda\varphi(y) \\ &\Rightarrow \varphi(\lambda x) \preceq \varphi(\lambda y) \Rightarrow \lambda x \preceq' \lambda y. \end{aligned}$$

2. **On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^n$ par : pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a**

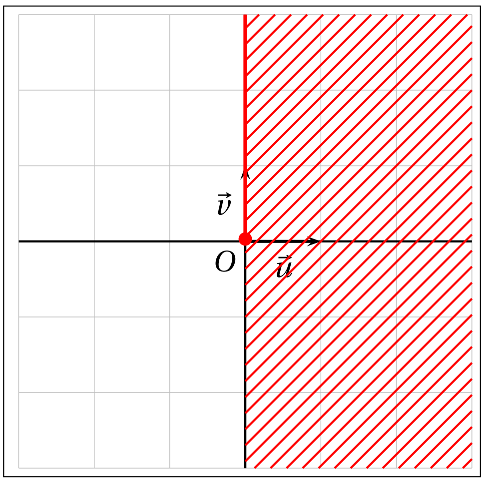
$$x \preceq y \quad \text{si} \quad x = y \quad \text{ou} \quad \left[x \neq y \text{ et } x_k < y_k \text{ avec } k = \min\left\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\right\}\right].$$

   (a) **En munissant le plan $\mathscr{P}$ d'un repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$, représenter graphiquement la partie $\{M(x,y) \in \mathscr{P}\ ; (0,0) \preceq (x,y)\}$ en la hachurant d'une couleur particulière.**

Remarquons que

$$\begin{aligned} & \{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid (0,0) \preceq (x,y)\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid (x,y) = (0,0) \text{ ou } \Big((x,y) \neq (0,0) \text{ et } \big((0 < x \text{ ou } (x = 0 \text{ et } 0 < y)\big)\Big)\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid \big(x = 0 \text{ et } y \geqslant 0\big) \text{ ou } x > 0\right\}. \end{aligned}$$

Cet ensemble correspond donc au demi-plan de frontière l'axe des ordonnées (dont seule la demi-droite $[O, \vec{v})$ est incluse, origine comprise). Représentons tout cela graphiquement (tout ce qui est rouge correspond donc à l'ensemble recherché) :



(b) **Montrer que la relation $\preceq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel. Cet ordre est appelé l'*ordre lexicographique*.**

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$.

réfléxivité : Puisque $x = x$, on a directement que $x \preceq x$.

antisymétrie : Si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors :
- soit $x = y$ et $y = x$: le résultat est démontré !
- soit $x = y$ et $y \neq x$: impossible !
- soit $x \neq y$ et $y = x$: impossible !
- soit $x \neq y$ et $x_k < y_k$, $y_{k'} < x_{k'}$, avec $k = \min\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}$ et $k' = \min\{j \in \{1, \dots, n\}, y_j \neq x_j\}$. On remarque alors nécessairement que $k = k'$, donc $x_k < y_k$ et $y_k < x_k$, ce qui est impossible.

Le résultat est ainsi démontré.

transitivité : Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors :
- soit $x = y$ et $y = z$: on a donc $x = z$, c'est-à-dire $x \preceq z$.
- soit $x = y$ et $y \preceq z$: on a directement que $x \preceq z$.
- soit $x \preceq y$ et $y = z$: on a encore directement que $x \preceq z$.
- soit $x_k < y_k$, $y_{k'} < z_{k'}$, avec $k = \min\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}$ et $k' = \min\{j \in \{1, \dots, n\}, y_j \neq z_j\}$.
  On a encore trois cas à distinguer :
  - Si $k < k'$, alors $x_k < y_k = z_k$, donc $x_k < z_k$,
  - Si $k > k'$, alors $x_{k'} = y_{k'} < z_{k'}$, donc $x_{k'} < z_{k'}$,
  - Si $k = k'$, alors $x_k < y_k < z_k$, donc $x_k < z_k$.

  Dans les trois cas, on en déduit que $x \preceq z$, donc que $\preceq$ est transitive.

totalité : Montrons que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On a que

$$x \preceq y \Leftrightarrow \big(x = y \text{ ou } (x \neq y \text{ et } x_k < y_k)\big).$$

Si cette condition n'est pas remplie (notons cela "$x \npreceq y$"), alors on a

$$\begin{aligned} x \npreceq y \quad &\Leftrightarrow \quad x \neq y \text{ et } (x = y \text{ ou } x_k \geqslant y_k) \quad \Leftrightarrow \quad (x \neq y \text{ et } x = y) \text{ ou } (x \neq y \text{ et } x_k \geqslant y_k) \\ &\Leftrightarrow \quad x \neq y \text{ et } x_k \geqslant y_k \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y \text{ et } y_k < x_k \,^* \\ &\Leftrightarrow \quad y \preceq x. \end{aligned}$$

* : Le cas d'égalité $x_k = y_k$ amène une contradiction avec le fait que k est le plus petit entier tel que $x_k < y_k$, et n'est donc pas possible.

compatible avec la structure d'espace vectoriel :
- Montrons que $x \preceq y \Rightarrow x + z \preceq y + z$: Puisque $x \preceq y$, on a soit $x = y$ ou alors, $x \neq y$ et $x_k < y_k$, avec $k = \min\{i \in \{0, \dots, n\}, x_k < y_k\}$.
  – Si $x = y$, alors $x + z = y + z$, d'où $x \preceq z$.
  – Sinon, $\left\{\begin{array}{l} x \neq y \\ x_k < y_k \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + z \neq y + z \\ x_k + z_k < y_k + z_k \end{array}\right. \Rightarrow x + z \preceq y + z.$
- Montrons que $x \preceq y \Rightarrow \lambda x \preceq \lambda y$: Avec les mêmes notations que précédemment,
  – Si $x = y$, alors $\lambda x = \lambda y$, d'où $x \preceq z$.
  – Sinon, $\left\{\begin{array}{l} x \neq y \\ x_k < y_k \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda x \neq \lambda y \\ \lambda x_k < \lambda y_k \end{array}\right. \Rightarrow \lambda x \preceq \lambda y.$

3 Base d'un système de racines

On supposera n quelconque. Soit R un système de racines de $\mathbb{R}^n$. Les résultats obtenus en I.1.e restent vrais, même si la dimension n'est plus 2. En particulier, pour deux racines $\alpha, \beta \in R$ distinctes, si $n_{\alpha,\beta} > 0$, l'un des deux coefficients $n_{\alpha,\beta}$ ou $n_{\beta,\alpha}$ est égal à 1.

On appelle *base du système de racines* R une partie B de R telle que
– la famille B est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$;
– tout élément de R est combinaison linéaire d'éléments de B, à coefficients entiers, soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls.
L'objet de cette partie est de mettre en évidence de telles bases.

1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une relation d'ordre total $\preceq$ compatible avec la structure d'espace vectoriel. On note alors R^+ l'ensemble des racines positives et R^- l'ensemble des racines négatives, c'est-à-dire :

$$R^+ = \{\alpha \in R \mid 0 \prec \alpha\} \quad \text{et} \quad R^- = \{\alpha \in R \mid \alpha \prec 0\}.$$

On appelle *racine simple* une racine positive qui n'est pas somme de deux racines positives et on note B l'ensemble des racines simples.

(a) Montrer que tout élément de R^+ est soit dans B, soit somme de deux racines positives strictement plus petites.

Soit α un élément de R^+. Dans ce cas, l'élément α se trouve soit dans B, soit dans $R^+ \setminus B$. Montrons que dans ce dernier cas, α est la somme de deux racines strictement plus petites que lui, que l'on note ici β et γ.

Mais supposons que l'une des deux racines (par exemple β) soit supérieure ou égale à α. Alors

$$\begin{cases} 0 \prec \alpha \preceq \beta \\ 0 \prec \gamma \prec \alpha \end{cases} \Rightarrow \gamma \prec \alpha \preceq \beta \Rightarrow \gamma + \gamma \prec \alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma.$$

Mais alors

$$0 \prec \gamma \Rightarrow \alpha \prec \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha \prec \beta + \gamma \Rightarrow \alpha \neq \beta + \gamma.$$

On aboutit à une contradiction, donc $\beta \prec \alpha$. On montre de la même manière que $\gamma \prec \alpha$ en échangeant les rôles de β et γ. On en déduit que α est bien la somme de deux racines positives strictement plus petites que lui.

(b) Montrer que tout élément de R^+ est combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls *(indication : on pourra ordonner les éléments de R^+ et faire une démonstration par récurrence ou raisonner par l'absurde)*.

Supposons qu'il existe $\alpha \in R^+$ qui ne soit pas combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls. Mais d'après la question précédente, α est alors somme de deux racines positives strictement plus petites que lui, dont l'une au moins n'est pas dans B (sinon α serait dans B !). (★)

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ que α est somme de n racines positives strictement plus petites que lui :

Initialisation : Paragraphe précédent.

Hérédité : Supposons que

$$\alpha = \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \cdots + \alpha_{n,n},$$

où pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha_{i,n} \in R^+$, et est strictement plus petit que α.

D'après (★), l'un au moins de ces n facteurs n'est pas dans B, supposons (quitte à échanger deux indices) que ce soit $\alpha_{n,n}$. Alors $\alpha_{n,n}$ est somme de deux éléments (notés $\alpha_{n,n+1}$ et $\alpha_{n+1,n+1}$) de R^+ strictement inférieurs à lui (en particulier, $\alpha_{n+1,n+1} \prec \alpha_{n,n}$), donc strictement inférieurs à α (hypothèse de récurrence). Posons alors

$$\forall\ i \in \{1,\ldots,n\},\ \alpha_{i,n+1} = \alpha_{i,n} (\prec \alpha) \qquad \text{et} \qquad \alpha_{n,n+1} + \alpha_{n+1,n+1} = \alpha_{n,n}.$$

Tous les $\alpha_{i,n+1}$ (pour tout $i \in \{1,\ldots,n+1\}$) sont strictement inférieurs à α, donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $(n+1)$.

On aboutit ainsi à une suite d'éléments de $R^+ \setminus B$ strictement décroissante :

$$0 \prec \cdots \prec \alpha_{n+1,n+1} \prec \alpha_{n,n} \prec \cdots \prec \alpha_{2,2} \prec \alpha_{1,1}.$$

Elle possède donc un nombre infini de termes, ce qui contredit le fait que R^+ est un ensemble fini. Notre hypothèse de départ est donc fausse, et on peut donc en déduire que tout élément $\alpha \in R^+$ est combinaison linéaire de B à coefficients entiers positifs ou nuls.

2. **Soient deux racines distinctes $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}$.**

(a) **Montrer que si $\boldsymbol{n_{\alpha,\beta}} > \mathbf{0}$, alors $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}$.**

Supposons que $n_{\alpha,\beta} > 0$. D'après l'introduction de la partie III, on a alors :
◇ soit $n_{\alpha,\beta} = 1$: dans ce cas, $s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\,\alpha = \beta - \alpha \in R \Rightarrow -(\beta - \alpha) \in R \Rightarrow \alpha - \beta \in R$;
◇ soit $n_{\beta,\alpha} = 1$: alors $s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha}\,\beta = \alpha - \beta \in R$.

(b) **Supposons que $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}$. Montrer que $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \notin \boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{n_{\alpha,\beta}} \leqslant \mathbf{0}$.**

Supposons que $\alpha - \beta \in R$. Alors $\alpha - \beta \neq 0$ (car $0 \notin R$) :

◇ soit $\alpha - \beta \in R^+$: alors il existe $\gamma \in R^+$ tel que $\gamma = \alpha - \beta$, donc

$$\alpha = \underbrace{\gamma}_{\in R^+} + \underbrace{\beta}_{\in B \subset R^+},$$

et α est somme de deux racines positives strictement inférieures à lui, ce qui contredit $\alpha \in B$ (d'après III.1.a).

◇ soit $\alpha - \beta \in R^-$: alors il existe $\delta \in R^+$ tel que $\delta = \beta - \alpha$, donc

$$\beta = \underbrace{\alpha}_{\in B \subset R^+} + \underbrace{\delta}_{\in R^+},$$

et comme précédemment, on aboutit à une contradiction.

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction prouvant ainsi que $\alpha-\beta \notin R$. La question III.2.a nous assure alors (par contraposée) que $n_{\alpha,\beta} \leqslant 0$.

3. **Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_s \in B$ des racines simples deux à deux distinctes et soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_s$ des réels positifs tels que**

$$\boldsymbol{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+\lambda_s\alpha_s.}$$

Montrer que les réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_s$ sont tous nuls *(indication : on pourra poser $v=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r$ et montrer que $\langle v,v\rangle<0$).*

Posons $v=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r$ et $w=\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+\lambda_s\alpha_s$. Calculons alors $\langle v,w\rangle$ (en utilisant la linéarité du produit scalaire) :

$$\begin{aligned}
\langle v,w\rangle &= \langle \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r,\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+\lambda_s\alpha_s\rangle\\
&= \sum_{j=r+1}^{s}\langle \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r,\lambda_j\alpha_j\rangle=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{s}\langle\lambda_i\alpha_i,\lambda_j\alpha_j\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{s}\lambda_i\lambda_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{s}\lambda_i\lambda_j\frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{2}\cdot 2\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{s}\lambda_i\lambda_j\frac{\|\alpha\|^2}{2}\,n_{\alpha_i,\alpha_j}.
\end{aligned}$$

Puisque $i\neq j$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ et la question précédente nous permet d'affirmer que $n_{\alpha_i,\alpha_j}\leqslant 0$, et puisque tous les coefficients λ_i et λ_j sont positifs ou nus par hypothèse, on en déduit que

$$\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{s}\lambda_i\lambda_j\frac{\|\alpha\|^2}{2}\,n_{\alpha_i,\alpha_j}\leqslant 0.$$

Mais nous avons aussi $v=w$ par hypothèse, d'où (en remplaçant w par v)

$$\langle v,v\rangle\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \|v\|^2\leqslant 0 \quad\Rightarrow\quad v=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0\ (\nabla).$$

Supposons alors qu'au moins l'un des λ_i est strictement positif, par exemple λ_1. Mais, pour tout $i\in\{2,\ldots,r\}$,

$$\alpha_i\in B \quad\Rightarrow\quad 0\prec\alpha_i \quad\Rightarrow\quad 0\preceq\lambda_i\alpha_i \quad\Rightarrow\quad 0\preceq\sum_{i=2}^{r}\lambda_i\alpha_i \quad\overset{0\prec\lambda_1\alpha_1}{\Longrightarrow}\ 0\prec\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\alpha_i.$$

Nous aboutissons à une contradiction avec (∇), nous prouvant que l'égalité $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$ n'est possible que lorsque $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$. Bien sûr, on a aussi $w=v$, donc le même raisonnement permet de conclure que $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_s=0$, d'où le résultat.

4. **Montrer que B est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. (On dit que B est une base du système de racines R, associée à l'ordre sur $\mathbb{R}^n$.)**

Puisque $B\subset R^+$, tout élément de B s'écrit comme combinaison linéaire (d'après III.1.b) d'éléments de B. Par suite, tout élément de R^- s'écrit aussi comme combinaison linéaire d'éléments de B. Autrement dit, tout élément de R s'écrit comme tel, et puisque la définition de R implique que ses éléments engendrent $\mathbb{R}^n$, on en déduit que B engendre aussi $\mathbb{R}^n$: B est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Montrons encore que B est une famille libre : montrons donc, en notant $\alpha_1, \dots, \alpha_C$ (où C est le cardinal de l'ensemble fini B), que $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_C\alpha_C = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_C = 0$, où les λ_i sont des réels. Posons $S = \{i \in \{1, \dots, C\} \mid \lambda_i \geqslant 0\}$ et $I = \{j \in \{1, \dots, C\} \mid \lambda_j < 0\}$, de sorte que

$$\sum_{i\in S} \lambda_i\alpha_i + \sum_{j\in I} \lambda_j\alpha_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i\in S} \lambda_i\alpha_i = \sum_{j\in I} (-\lambda_j)\alpha_i.$$

D'après la question III.3, il vient que tous les λ_i sont nuls, et on en déduit finalement que B est une famille libre.

B est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

5. **En munissant $\mathbb{R}^2$ de l'ordre lexicographique, pour chacun des quatre systèmes de racines, dessiner d'une couleur particulière les vecteurs de la base associée.**

Rappelons que $B = \{0 \prec \alpha \mid \alpha$ n'est pas somme de deux racines positives$\}$. Il faut alors distinguer quatre cas. Pour chacun d'entre eux, nous allons d'abord nous aider de la question II.2.a pour éliminer les vecteurs de R n'étant pas positifs (ils seront dessinés en gris). Nous obtiendront ainsi les éléments de R^+.

La question III.1.a nous permettra alors de trouver les deux vecteurs de la base recherchée : en effet, il suffira de trouver les deux vecteur les plus petits pour la relation $\preceq$.

Notons encore que $\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid (0,0) \preceq (x,y)\} = \{\overrightarrow{OM}(x,y) \mid (0,0) \preceq (x,y)\}$. Concrétement,

$\boldsymbol{A_1 \times A_1}$ **:** $R = \{\alpha, \beta, -\alpha, -\beta\}$. On constate alors que ni $-\alpha$, ni $-\beta$ ne sont dans R^+ (en effet, l' "extrémité" de chacun des ces vecteurs n'est pas dans l'ensemble déterminé à la question II.2.a), donc

$$B = \{\alpha, \beta\}.$$

$\boldsymbol{A_2}$ **:** On détermine que $R^+ = \{\alpha, s_\alpha(\beta), -\beta\}$. De plus, les deux vecteurs les plus petits pour la relation $\preceq$ sont $s_\alpha(\beta)$ et $-\beta$. En effet, rappelons que

$$\alpha = (1,0), \quad s_\alpha(\beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad -\beta = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on a directement que $s_\alpha(\beta) \preceq \alpha$ et $-\beta \preceq \alpha$. Donc $\alpha \notin B$, et

$$B = \{s_\alpha(\beta), -\beta\}.$$

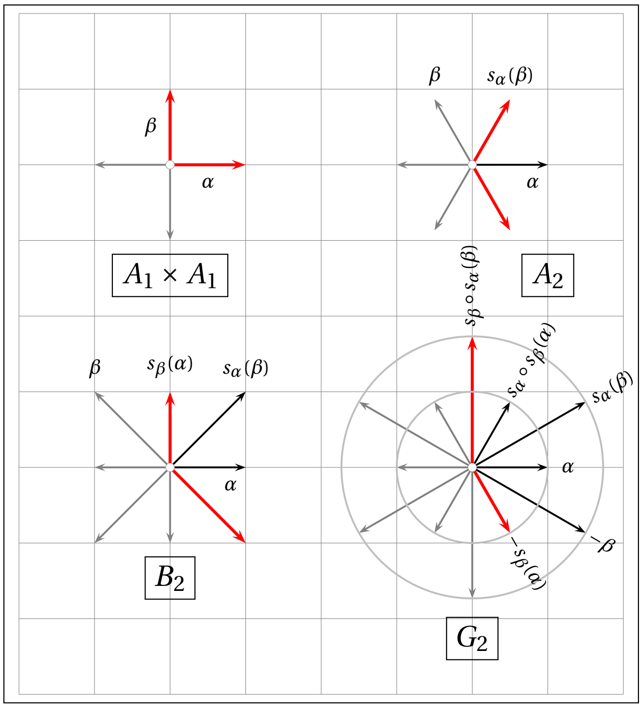
$\boldsymbol{B_2}$ **:** On détermine que $R^+ = \{\alpha, s_\alpha(\beta), s_\beta(\alpha), -\beta\}$. De plus, les deux plus petits vecteurs pour la relation $\preceq$ sont $-\beta$ et $s_\beta(\alpha)$ (pour s'en convaincre, il suffit de regarder la représentation page suivante), donc $\alpha, s_\alpha(\beta) \notin B$, et

$$B = \{s_\beta(\alpha), -\beta\}.$$

$\boldsymbol{G_2}$ **:** On détermine que $R^+ = \{\alpha, s_\alpha(\beta), -\beta, -s_\beta(\alpha), s_\alpha \circ s_\beta(\alpha), s_\beta \circ s_\alpha(\beta)\}$. De plus, les deux plus petits vecteurs pour la relation $\preceq$ sont $s_\beta(\alpha)$ et $s_\beta \circ s_\alpha(\beta)$, d'où

$$B = \{s_\beta \circ s_\alpha(\beta), s_\beta(\alpha)\}.$$

Voici les figures associées à ces calculs :



4 Groupe de Weyl d'un système de racines

Soit R un système de racines de $\mathbb{R}^n$, $\preceq$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel, R^+ l'ensemble des racines positives et B la base de R associée à la relation d'ordre. On appelle groupe de Weyl de R, noté W, le sous-groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, engendré par les symétries s_α ($\alpha \in R$).

1. **Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$ (le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^n$). Établir que**
$$s_{\varphi(a)} = \varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}.$$

Rappelons tout d'abord que si $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$, alors on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad (\flat) \qquad \text{et} \qquad \|\varphi(x)\| = \|x\| \quad (\sharp).$$

De plus, puisque $O(\mathbb{R}^n) \subset GL(\mathbb{R}^n)$, une telle application est linéaire ($\natural$).

Il vient alors que pour tout $b \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1})(b) &= \varphi\Big(s_a\big(\varphi^{-1}(b)\big)\Big) = \varphi\left(\varphi^{-1}(b) - 2\frac{\langle a, \varphi^{-1}(b)\rangle}{\langle a, a\rangle} a\right) \\
&\overset{(\flat)}{=} \varphi\left(\varphi^{-1}(b) - 2\frac{\langle \varphi(a), b\rangle}{\langle \varphi(a), \varphi(a)\rangle} a\right) \overset{(\natural)}{=} b - 2\frac{\langle \varphi(a), b\rangle}{\langle \varphi(a), \varphi(a)\rangle} \varphi(a) \\
&= s_{\varphi(a)}(b),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. **Montrer que le groupe de Weyl W est un groupe fini.**

Soit w un élément du groupe de Weyl W. Puisque W est engendré par les symétries s_α (pour $\alpha \in R$), et que le système de racines R est stable par chacune des rotations s_α, on en déduit que R est stable par w.

Par suite, $w(B)$ est une autre base de $\mathbb{R}^n$, mais toujours incluse dans R. Comme R est fini, ce nombre de bases l'est aussi. Finalement, W est fini car w est entièrement déterminé par $w(B)$.

3. (a) **Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}^+ \backslash \boldsymbol{B}$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}$ tel que $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle > \mathbf{0}$ *(indication : on pourra utiliser III.1.b et développer $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$)*. En déduire que $\boldsymbol{n_{\beta,\alpha}} > \mathbf{0}$ et que $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}^+$.**

Soit $\alpha \in R^+ \backslash B$. D'après la question III.1.b, α est alors combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls, c'est-à-dire (en posant pour $i \geqslant 1$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$ et $\beta_i \in B$)

$$\alpha = \sum_{i \geqslant 1} \lambda_i \beta_i.$$

On a alors

$$0 \overset{\alpha \neq 0}{<} \langle a, a \rangle = \left\langle \sum_{i \geqslant 1} \lambda_i \beta_i, a \right\rangle = \sum_{i \geqslant 1} \lambda_i \langle \beta_i, a \rangle.$$

On en déduit que l'un au moins des $\langle \beta_i, a \rangle$ est strictement positif (en effet, si aucun ne l'était, la somme serait négative, contredisant l'inégalité $\langle a, a \rangle > 0$), donc il existe bien $\beta \in B$ tel que $\langle \beta, a \rangle > 0$.

Par suite, en utilisant la définition de $n_{\beta,\alpha}$, on détermine aisément que

$$n_{\beta,\alpha} = 2\,\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 2\,\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\beta\|^2} > 0.$$

D'après la question III.2.a, on a alors $\beta - \alpha \in R$. Supposons donc que $\beta - \alpha \in R^+$. D'après la question III.1.a, $\beta - \alpha$ est alors soit dans B (ce qui est impossible puisque $\alpha \notin B$), soit somme de eux racines positives (c'est donc le cas). Mais $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ est alors une écriture de β sous forme de deux racines positives, ce qui contredit $\beta \in B$.

On a donc démontré par l'absurde que $\beta - \alpha \notin R^+$, donc $\beta - \alpha \in R^-$, c'est-à-dire $\alpha - \beta \in R^+$.

(b) **Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}^+$ et $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}$ tels que $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. Montrer que $\boldsymbol{s_\beta(\alpha)} \in \boldsymbol{R}^+$.**

Puisque en particulier $\alpha \in R$, on a aussi $s_\beta(\alpha) \in R$. Par conséquent, pour restreindre ce domaine d'appartenance à R^+, il suffit de prouver que $0 \prec s_\beta(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \alpha - 2\, n_{\beta,\alpha}\beta$. Distinguons alors deux cas :

$\boldsymbol{n_{\beta,\alpha} \leqslant 0}$: Dans ce cas, $-2n_{\beta_\alpha} \geqslant 0$, et puisque l'ordre lexicographique est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, les deux inégalités $0 \preceq -2\,n_{\beta,\alpha}$ et $0 \prec \alpha$ (car $\alpha \in R^+$) donnent

$$0 \prec \alpha - 2\,n_{\beta_\alpha}\beta = s_\beta(\alpha).$$

Par suite, $s_\beta(\alpha) \in R^+$.

$\boldsymbol{n_{\beta,\alpha} > 0}$: Dans ce nouveau cas, le tableau de la question I.1.e nous affirme que $n_{\beta,\alpha}$ vaut 1 ou 2. Il y a donc encore deux cas à distinguer :

- ⋆ Supposons que $n_{\beta,\alpha} = 1$. Alors $s_\beta(\alpha) = \alpha - \beta$, et la question précédente nous affirme que $\alpha - \beta \in R^+$, donc que $s_\beta(\alpha) \in R^+$.
- ⋆ Supposons enfin que $n_{\beta,\alpha} = 2$. Alors $R \ni s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta$. Or

$$\underbrace{\beta}_{\in B} = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\in R^+} + (2\beta - \alpha)$$

implique que $2\beta - \alpha \notin R^+$, donc que $s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta \in R^+$.

Dans tous les cas, on a démontré que $s_\beta(\alpha) \in R^+$.

4. **On note W_B le sous-groupe de W engendré par les applications $(s_\alpha)_{\alpha\in B}$ et on pose**

$$S = \{w(\alpha) \mid w \in W_B \text{ et } \alpha \in B\}.$$

(a) **Montrer que $R^+ \subset S$ *(indication : on pourra raisonner par l'absurde)*.**

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un élément α_0 qui soit dans R^+ mais pas dans S. Alors $\alpha_0 \in R^+ \backslash B$ car $B \subset S$, donc d'après la question 3.a précédente, il existe $\beta_0 \in B$ tel que $\langle \beta_0, \alpha_0 \rangle > 0 \Rightarrow n_{\beta_0,\alpha_0} > 0$. Puisque $\alpha_0 \neq \beta_0$ (en effet, $\beta_0 \in B$ et $\alpha_0 \in R^+ \backslash B \subset R$, la question 3.b nous assure que $s_{\beta_0}(\alpha_0) \in R^+$. Mais $\alpha_0 \notin S$ implique que $s_{\beta_0}(\alpha_0) \in R^+ \backslash B$.

Posons alors $\alpha_1 = s_{\beta_0}(\alpha_0)$. Remarquons que $\alpha_1 = \alpha_0 - n_{\beta_0,\alpha_0}\beta_0 \neq \alpha_0$ puisque $n_{\beta_0,\alpha_0} > 0$. D'après la question 3.a, il existe alors $\beta_1 \in B$ tel que $n_{\beta_1,\alpha_1} > 0$ et $s_{\beta_1}(\alpha_1) \in R^+ \backslash B$.

Posons alors

$$\alpha_2 = s_{\beta_1}(\alpha_1) = \alpha_1 - n_{\beta_1,\alpha_1}\beta_1 = \alpha_0 - n_{\beta_0,\alpha_0}\beta_0 - n_{\beta_1,\alpha_1}\beta_1 \in R^+.$$

Comme $n_{\beta_0,\alpha_0}, n_{\beta_1,\alpha_1} \neq 0$, il vient que $\alpha_2 \neq \alpha_1$ et $\alpha_2 \neq \alpha_0$. En poursuivant ce raisonnement, on construit une suite infinie d'éléments de R^+ deux à deux distincts, contredisant ainsi le fait que R^+ est fini. Au final, $\alpha_0 \in S$ et on conclut que $R^+ \subset S$.

(b) **En déduire que $R = S$ *(indication : on pourra remarquer que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ pour $\alpha \in B$)*.**

Montrons que $R^{\subset} S$. Soit $\alpha \in R^-$, de sorte que $-\alpha \in R^+ \subset S$. Il existe donc $w \in W_B$ et $\beta \in B$ tels que $-\alpha = w(\beta)$. La remarque de l'énoncé nous permet alors d'avancer : en effet, puisque $\beta \in B$, on a $s_\beta(\beta) = -\beta$, d'où

$$-\alpha = w(\beta) \Rightarrow \alpha = w(s_\beta(\beta)) = (w \circ s_\beta)(\beta) \in S \Rightarrow R^- \subset S.$$

Puisque $R^+ \subset S$, on en déduit que $R \subset S$. Enfin, l'inclusion triviale $S \subset R$ nous assure finalement que $R = S$.

(c) **Conclure que $W = W_B$.**

Naturellement, $W_B \subset W$. Montrons alors que $W \subset W_B$ en prouvant que pour tout $\alpha \in R$, $s_\alpha \in W_B$. Soit $\alpha \in R$. Puisque $\alpha \in S$ (question précédente), il existe $w \in W_B$ et $\beta \in B$ tels que $\alpha = w(\beta)$. Par suite, d'après la question 1 de cette partie,

$$s_\alpha = s_{w(\beta)} = w \circ s_\beta \circ w^{-1} \in W_B.$$

5 Groupe diédraux

1. **Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p}, le groupe des isométries invariant un polygone régulier**

$$\mathscr{P}_p = \{M_0, M_1, \dots, M_{p-1}\}$$

à p sommets, parcourus dans le sens direct. On posera $M_p = M_0$.

(a) **Montrer que le sous-groupe C_p de D_{2p} constitué des isométries directes, est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $2\pi/p$ où O est le centre du polygone $\mathscr{P}_p$.**

Soit $r \in C_p \subset D_{2p}$. Puisque r laisse le polygone invariant, r laisse également son centre invariant : $r(0) = 0$. r est donc une rotation, qui de plus permute les sommets du polygone et implique donc que son angle est un multiple de $2\pi/p$. On a donc $r = \rho^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Mais ρ est d'ordre p puisque $M_p = M_0$, ce qui implique que

$$C_p \subset \left\{\rho^n, n \in \{0, \dots, p-1\}\right\}.$$

Puisque $\rho \in C_p$, on prouve bien que C_p est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ.

(b) **Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygone $\mathscr{P}_p$ invariant.**

La symétrie orthogonale σ d'axe (OM_0) convient. En effet, dans un polygone régulier, chaque droite passant par son centre et un sommet est une axe de symétrie. Notons alors que $\sigma \subset D_{2p}$.

(c) **Montrer que**

$$D_{2p} = \left\{\rho^i \circ \sigma^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\right\}$$

et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.

$\supset$ **:** Évident, car $\rho^i \in C_p \subset D_{2p}$, $\sigma \in D_{2p}$ et $\sigma^0 = \mathrm{Id} \in D_{2p}$.

$\subset$ **:** Soit $d \in D_{2p}$. Supposons que w soit une isométrie directe. Alors $w \in C_p$ d'après la question 1.a, et par suite, il existe $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $d = \rho^i = \rho^i \circ \sigma^0$. Dans le cas contraire, c'est $d \circ \sigma$ qui est une isométrie directe et qui s'écrit donc pour un $i \in \{0, \dots, p-1\}$ sous la forme $d \circ \sigma = \rho^i \Leftrightarrow d = \rho^i \circ \sigma^1$. Dans tous les cas,

$$D_{2p} \subset \left\{\rho^i \circ \sigma^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\right\}.$$

On a finalement $\mathrm{Card}(D_{2p}) = p \times 2 = 2p$ du fait que toutes les isométries directes de D_{2p} (ρ^i) sont distinctes, ainsi que toutes les isométries indirectes $(\rho^i \circ \sigma)$.

(d) **Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.**

Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Montrons déjà que

$$\forall\, i \in \{0, \dots, p-1\}, \quad \sigma(M_i) = M_{p-i}. \quad (\bigstar)$$

Le symétrique de M_0 est lui-même ou encore $M_p = M_0$. Lorsqu'on parcourt le polygone dans un sens, les symétriques sont obtenus en faisant le parcours du même point point de départ, mais dans l'autre sens. Autrement dit, les points $M_1, M_2, \dots$ auront pour symétriques respectifs $M_{p-1}, M_{p-2}, \dots$

Puisque (O, M_0, M_1) sont trois points formant un repère de E, il suffit de vérifier ce résultat pour ces trois points. Notons au préalable que si $k = 0$, alors on a $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$. Supposons donc dans la suite que $k \geqslant 1$.

pour O : Puisque O est conservé par ρ^k et σ, on a directement $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma(O) = \rho^{p-k}(O)$.

pour M_0 : Dans ce cas,

$$\sigma \circ \rho^k \circ \sigma(M_0) = \sigma \circ \rho^k(M_0) = \sigma(M_k) \overset{(\bigstar)}{=} M_{p-k} \quad \text{et} \quad \rho^{p-k}(M_0) = M_{p-k}.$$

pour M_1 : Dans ce cas-là, on aura :

$$\begin{aligned} & \sigma \circ \rho^k \circ \sigma(M_1) = \sigma \circ \rho^k(M_{p-1}) = \sigma \circ \rho^{k-1} \circ \rho(M_{p-1}) = \sigma \circ \rho^{k-1}(M_0) = \sigma(M_{k-1}) \overset{(\bigstar)}{=} M_{p-k+1} \\ \text{et} \quad & \rho^{p-k}(M_1) = \rho^{p-k} \circ \rho(M_0) = \rho^{p-k+1}(M_0) = M_{p-k+1}. \end{aligned}$$

On en déduit donc l'égalité recherchée : $\forall\ k \in \{0, \dots, p-1\}, \sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.

2. **Soit G un groupe fini engendré par deux éléments distincts s et s' d'ordre 2. On pose $r = ss'$ et on note p l'ordre de r. On note e l'élément neutre de G.**

   (a) **Montrer que G est engendré par r et s.**

   Puisque s est d'ordre 2, on a $s^2 = e$. Par suite, $s' = s^2 s' = s(ss') = sr$. Par suite, le sous-groupe de G engendré par r et s contient s' (et s), donc contient G (car il est engendré par ces deux éléments). Il s'en suit que G est engendré par r et s.

   (b) **Établir que $sr = r^{-1}s$, puis que $sr^k = r^{p-k}s$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que**

$$G = \left\{ r^i s^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\} \right\}.$$

   L'égalité $srsr = (sr)^2 = s'^2 = e$ (car s' est d'ordre 2) implique que $srs = r^{-1}$, puis $sr = srs^2 = r^{-1}s$. Montrons l'égalité suivante par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$.

   Initialisation ($k = 0$) : Puisque p est l'ordre de r, on a $e = r^p \Rightarrow s = r^p s$.

   Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang k, et montrons qu'il l'est toujours au rang $k+1$. On a :

$$sr^{k+1} = sr^k r \overset{\text{H.R.}}{=} r^{p-k} sr = r^{p-k} r^{-1} s = r^{p-k-1} s = r^{p-(k+1)} s.$$

   La récurrence s'achève ici. D'après la question précédente, et du fait que les ordres respectifs de r et s soient p et 2, tout élément de G s'écrit sous la forme $r^{i_1} s^{j_1} r^{i_2} s^{j_2} \cdots r^{i_k} s^{j_k}$ où $\forall\ n \in \{1, \dots, k\}, i_n \in \{0, \dots, p-1\}$ et $j_n \in \{0, 1\}$. La récurrence démontrée ci-dessus nous prouve ainsi que cette écriture peut se réduire à $r^i s^j$, où $i \in \{0, \dots, p-1\}$ et $j \in \{0, 1\}$, d'où

$$G = \left\{ r^i s^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\} \right\}.$$

(c) **Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s \neq r^k$ *(indication : on pourra raisonner par l'absurde et montrer que G serait commutatif, puis que $G = \{e, r\}$)*. En déduire que G est d'ordre $2p$.**

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $s = r^k$. Alors la question précédente nous permet d'affirmer que G n'est plus généré que par r et est donc cyclique et nécessairement commutatif. Mais alors $r^2 = (ss')(ss') = ss's's = ss = e$, et on en déduit que $G = \{e, r\}$. Ce résultat contredit le fait que G contient au moins trois éléments distincts : e, s et s'.

L'ordre de G est au plus $\operatorname{Card}(\{0, \dots, p-1\}) \times \operatorname{Card}(\{0, 1\}) = 2p$. Montrons que tous les éléments de l'ensemble $G = \left\{ r^i s^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\} \right\}$ sont deux à deux distincts. Supposons que $r^i s^j = r^{\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}}$, où $i, \tilde{\imath} \in \{0, \dots, p-1\}$ et $j, \tilde{\jmath} \in \{0, 1\}$. Alors $r^i = r^{\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}} s^{-j}$, et donc $r^{-\tilde{\imath}} r^i = s^{\tilde{\jmath}} s^{-j} \Leftrightarrow r^{i-\tilde{\imath}} = s^{\tilde{\jmath}-j}$. Quitte à échanger les rôles de i et $\tilde{\imath}$, on peut supposer que $i \geqslant \tilde{\imath}$, donc que $i - \tilde{\imath} \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, $r^{i-\tilde{\imath}} \neq s$ et puisque s est d'ordre 2, on a nécessairement $s^{\tilde{\jmath}-j} = e$ et $r^{i-\tilde{\imath}} = e$, soit $i = \tilde{\imath}$ et $j = \tilde{\jmath}$.

On a donc prouvé que $\operatorname{Card}(G) = 2p$.

(d) **Montrer que G est isomorphe à D_{2p}.**

Pour $i \in \{0, \dots, p-1\}$ et $j \in \{0, 1\}$, l'application bijective

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & D_{2p} \\ r^i s^j & \longmapsto & \rho^i \circ \sigma^j \end{array}$$

est clairement un isomorphisme de groupes. En effet, la bijection est évidente ; soient alors $r^i s^j$ et $r^{\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}}$ deux éléments de G, où $i, \tilde{\imath} \in \{0, \dots, p-1\}$ et $j, \tilde{\jmath} \in \{0, 1\}$. Alors,

Si $j = 0$, alors

$$\varphi(r^i\, r^{\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}}) = \varphi(r^{i+\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}}) = \rho^{i+\tilde{\imath}} \circ \sigma^{\tilde{\jmath}} = \rho^i \circ \rho^{\tilde{\imath}} \circ \sigma^{\tilde{\jmath}} = \varphi(r^i) \circ \varphi(r^{\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}}).$$

Si $j = 1$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(r^i s\, r^{\tilde{\imath}} s^{\tilde{\jmath}}) &= \varphi(r^i\, s r^{\tilde{\imath}}\, s^{\tilde{\jmath}}) \overset{2.b}{=} \varphi(r^i\, r^{p-k} s\, s^{\tilde{\jmath}}) = \varphi(r^{i+p-k}\, s^{\tilde{\jmath}+1}) \\ &= \rho^{i+p-k} \circ \sigma \circ \sigma^{\tilde{\jmath}} = \rho^i \circ \rho^{p-k} \circ \sigma \circ \sigma^{\tilde{\jmath}} \overset{1.d}{=} \rho^i \circ \sigma^1 \circ \rho^k \circ \underbrace{\sigma \circ \sigma}_{=\mathrm{Id}_E} \circ \sigma^{\tilde{\jmath}} \\ &= \varphi(r^i s^1) \circ \varphi(r^k s^{\tilde{\jmath}}). \end{aligned}$$

On en déduit donc que G est isomorphe à D_{2p}.

(e) **Déterminer les groupe de Weyl associés aux systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$.**

Soit R un système de racines de $\mathbb{R}^2$ de base ordonnée (par l'ordre lexicographique) $B = \{\alpha, \beta\}$, déterminée en fin de partie III. Puisque $W \overset{4.c}{=} W_B \overset{\text{déf.}}{=} \langle s_\alpha, s_\beta \rangle$. D'après tout ce qui précède, W est engendré par s_α et $r = s_\alpha \circ s_\beta$, et est isomorphe au groupe diédral D_{2p} où p est l'ordre de r. Or $s_\alpha \circ s_\beta$ est une rotation de centre O et d'angle $2\theta_{\alpha,\beta}$.

$R = A_1 \times A_1$: r est une rotation d'angle $2\frac{\pi}{2} = \pi$, et est donc d'ordre 2. Dans ce cas, W est isomorphe au groupe diédral D_4.

$R = A_2$: r est une rotation d'angle $2\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, et est donc d'ordre 3. Dans ce cas, W est isomorphe au groupe diédral D_6.

$R = B_2$: r est une rotation d'angle $2\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, et est donc d'ordre 4. Dans ce cas, W est isomorphe au groupe diédral D_8.

$R = G_2$: r est une rotation d'angle $2\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$, et est donc d'ordre 6. Dans ce cas, W est isomorphe au groupe diédral D_{12}.

6 Chambre de Weyl

Soit R un système de racines de $\mathbb{R}^n$ et W le groupe de Weyl associé. Pour tout $\alpha \in R$, on note P_α l'hyperplan orthogonal à α.

1. **Montrer que $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in R} P_\alpha$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.**

   La partie Ω est réunion finie disjointe de parties non vides ouvertes connexes de $\mathbb{R}^n$, ce sont les *chambres de Weyl* du système de racines R.

   Étant donné P_α est un espace vectoriel pour tout $\alpha \in R$, il est fermé. De plus, R étant fini, la réunion $\bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$, et donc par complémentarité que Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

   Notons que l'énoncé suggère que les chambres de Weyl constituent une partition de Ω.

2. **Soit C une partie connexe non vide de $\mathbb{R}^n$ inclus dans Ω. Montrer qu'il existe une chambre de Weyl de R contenant C.**

   Notons $C_1, \ldots, C_m$ les chambres de Weyl. Puisqu'elles constituent une partition de Ω, on a $\Omega = \coprod_{i=1}^m C_i$. Puisque $C \subset \Omega$, il vient que $C = (C \cap C_1) \coprod \cdots \coprod (C \cap C_m)$. Mais C est une partie connexe, donc un seul de ces ensembles ouverts est non vide :

   $$\exists\, i \in \{1, \ldots, m\} \mid C \cap C_i \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}, C \cap C_j = \varnothing.$$

   On en déduit que $C \subseteq C_i$ et donc que C est comrpise dans une chambre de Weyl.

3. **Montrer que le groupe de Weyl W permute les hyperplans P_α ($\alpha \in R$), ainsi que les chambres de Weyl.**

   D'après la question III.4, les symétries s_α ($\alpha \in R$) permutent les éléments de R. Par suite, le groupe de Weyl permute aussi les éléments de R. Si les éléments de R sont permutés, les hyperplans relatifs à ces éléments le seront aussi, ainsi quel es chambres de Weyl.

4. **Soient C_1 et C_2 deux chambres de Weyl de R et soit $x_1 \in C_1$ et $x_2 \in C_2$.**

   (a) **Justifier l'existence d'un élément $w \in W$ tel que**

   $$\|x_1 - w(x_2)\| = \inf\{\|x_1 - w'(x_2)\| \mid w' \in W\}.$$

   Cette égalité est triviale du fait que W est fini.

(b) **On pose $I = \{tx_1 + (1-t)w(x_2) \mid t \in [0,1]\}$. Montrer que $I \subset C_1$ *(indication : on pourra supposer qu'il existe $\alpha \in R$ tel que $I \cap P_\alpha \neq \varnothing$ et montrer qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $\langle t_0 x_1 + (1-t_0)w(x_2), \alpha\rangle = 0$ et que $\|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 < \|x_1 - w(x_2)\|^2$).***

Raisonnons par l'absurde en supposant que $I \not\subset C_1$. I est non vide car il contient x_1 (lorsque $t = 0$) qui est un élément de C_1. Or $I \not\subset C_1$, donc il n'existe aucune chambre de Weyl qui contient I. Puisque I est non vide et connexe (car il est en particulier connexe par arcs), la question 2 nous assure que $I \not\subset \Omega$, et donc qu'il existe $\alpha \in R$ tel que $I \cap P_\alpha \neq \varnothing$.

D'après la question 3, le groupe de Weyl permute les chambres de Weyl, par conséquent $w_2 \in C_2$ implique que $w(x_2)$ est contenu dans une chambre de Weyl, donc dans Ω. De plus, $x_1 \in C_1 \subset \Omega$. On en déduit que

$$x_1, w(x_2) \not\in P_\alpha \Rightarrow \exists\, t_0 \in]0,1[\mid t_0 x_1 + (1-t_0)w(x_2) \in P_\alpha \Leftrightarrow \langle t_0 x_1 + (1-t_0)w(x_2), \alpha\rangle = 0.$$

On utilise ensuite la bilinéarité du produit scalaire afin de montrer que cette égalité est encore équivalente à

$$t_0\langle x_1 - w(x_2), \alpha\rangle + \langle w(x_2), \alpha\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_1 - w(x_2), \alpha\rangle = -\frac{\langle w(x_2), \alpha\rangle}{t_0}. \quad (\diamond)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& x_1 - s_\alpha \circ w(x_2) \overset{\text{déf. p.2}}{=} x_1 - w(x_2) + 2\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha \\
\Rightarrow\quad & \|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 = \|x_1 - w(x_2)\|^2 + 4\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle}{\|\alpha\|^2}\langle x_1 - w(x_2), \alpha\rangle + 4\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle^2}{\|\alpha\|^4}\|\alpha\|^2 \\
\overset{(\diamond)}{\Leftrightarrow}\quad & \|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 - \|x_1 - w(x_2)\|^2 = -\frac{4}{t_0}\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle^2}{\|\alpha\|^2} + 4\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle^2}{\|\alpha\|^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 - \|x_1 - w(x_2)\|^2 = \underbrace{-\frac{4}{t_0}}_{<0}\underbrace{(1-t_0)}_{>0}\underbrace{\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle^2}{\|\alpha\|^2}}_{>0 \text{ car } w(x_2)\not\in P_\alpha} < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 < \|x_1 - w(x_2)\|^2.
\end{aligned}$$

Puisque $s_\alpha \circ w \in W$, cette inégalité contredit le résultat de la question 4.a, et on en déduit finalement que $I \subset C_1$.

(c) **En déduire que $w(C_2) = C_1$. On dit que le groupe W *opère transitivement* sur les chambres de Weyl de R.**

Lorque $t = 0$, la question précédente nous a permis de montrer que $w(x_2) \in C_1$, donc $w(C_2) \subseteq C_1$. Mais puisque $w(C_2)$ est une chambre de Weyl d'après la question 3, on a nécessairement $w(C_2) = C_1$.

5. **Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R et soit $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ la base duale de B pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant**

$$\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \langle \beta_i, \beta'_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C(B)} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta_1} \rangle > \mathbf{0}, \ldots, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta_n} \rangle > \mathbf{0}\} \\ &= \left\{ \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i} \boldsymbol{\beta'_i} \mid \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n} \in \mathbb{R}_+^* \right\}, \end{aligned}$$

égalité que l'on ne demande pas de démontrer.

(a) **Montrer que $C(B) \subset \Omega$ et qu'il existe une chambre de Weyl C telle que $C(B) \subset C$.**

Soient $x \in C(B)$ et $\alpha \in R$. D'après la question III.1.b, α est combinaison linéaire d'éléments de Bà coefficients entiers positifs ou nuls si $\alpha \in R^+$, et donc à coefficients entiers négatifs ou nuls si $\alpha \in R^-$. En combinant ce résultat avec la définition de $C(B)$ et la bilinéarité du produit scalaire, on trouve que $\langle x, \alpha \rangle \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin P_\alpha$. Ce résultat étant valable pour tout $\alpha \in R$, il vient que $x \in \Omega$. Au final, $C(B) \subset \Omega$.

De plus, si $x, y \in C(B)$, alors $\langle tx + (1-t)y, \beta_i \rangle = t\langle x, \beta_i \rangle + (1-t)\langle y, \beta_i \rangle > 0$ pour tous $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $t \in [0, 1]$, ce qui implique que $tx + (1-t)y \in C(B)$ et donc que $[x, y] \in C(B)$. On vient de prouver que $C(B)$ est convexe, donc connexe par arcs, et donc aussi simplement connexe. Mais $C(B)$ est également non vide car d'après l'énoncé, on a $\sum_{i=1}^n \beta'_i \in C(B)$ et incluse dans Ω d'après la paragraphe précédent. La question 2 nous assure alors qu'il existe une chambre de Weyl notée C telle que $C(B) \subset C$.

(b) **Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé. On pose**

$$\boldsymbol{C_i^+} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta_i} \rangle > \mathbf{0}\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{C_i^-} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta_i} \rangle < \mathbf{0}\}.$$

Montrer que C_i^+ et C_i^- sont des parties ouvertes telles que $C_i^+ \cup C_i^- = C$ et $C_i^+ \cap C_i^- = \varnothing$. En déduire que $C = C_i^+$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé. Les parties C_i^+ et C_i^- sont ouvertes car leurs complémentaires dans $\mathbb{R}^n$ sont clairement fermés. Si $x \in C$, alors $x \notin P_{\beta_i}$, et donc $\langle x, \beta_i \rangle \neq 0$. Il vient nécessairement que $x \in C_i^+$ ou $x \in C_i^-$, d'où $x \in C_i^+ \cup C_i^-$ (et il est trivial que $C_i^+ \cap C_i^- = \varnothing$). Puisque $C(B)$ est connexe (justifié dans la question 5.a), on a alors $C = C_i^+$ ou $C = C_i^-$ car l'un des deux ensembles C_i^+ ou C_i^- est vide.

Par définition de la base duale $(\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$, l'élément $\sum_{j=1}^n \beta'_j$ de $C(B)$ se trouve dans C_i^+ car $\left\langle \sum_{j=1}^n \beta'_j, \beta_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \beta'_j, \beta_i \rangle = 1$. Il vient que $C_i^+ \neq \varnothing$, d'où $C_i^- = \varnothing$ et $C = C_i^+$.

(c) **En déduire que $C(B) = C$. On dit que $C(B)$ est la *chambre de Weyl fondamentale* relativement à B.**

Le résultat de la question précédente étant valable pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

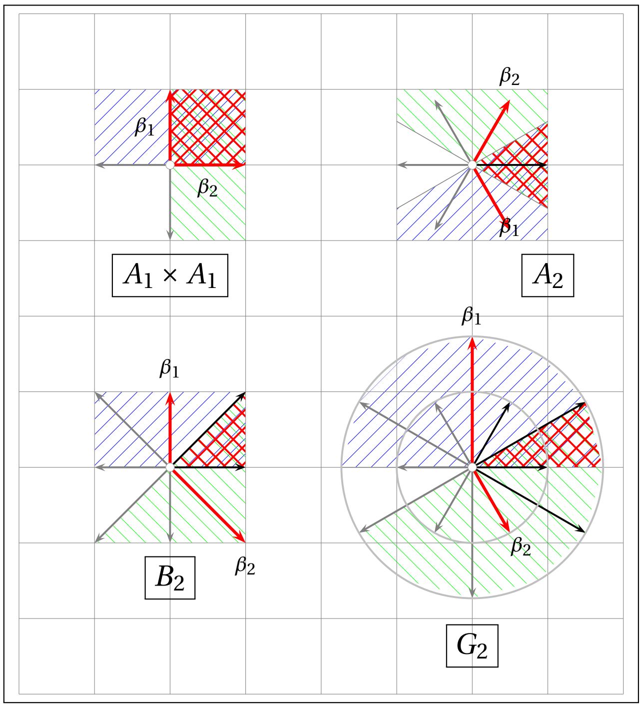
$$\begin{aligned} C = \bigcap_{i=1}^n C_i^+ &= \{x \in C \mid \langle x, \beta_1 \rangle > 0, \ldots, \langle x, \beta_n \rangle > 0\} \\ &= C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \beta_1 \rangle > 0, \ldots, \langle x, \beta_n \rangle > 0\} = C \cap C(B). \end{aligned}$$

Mais puisque $C(B) \subset C$ (question 1.5.a), l'égalité précédente se transforme en $C = C(B)$.

6. **Pour chacun des quatre systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$, hachurer d'une couleur particulière la chambre de Weyl fondamentale relativement à la base associée à l'ordre lexicographique de $\mathbb{R}^2$.**

   Notons que dans $\mathbb{R}^2$, $C = C(B)$ s'écrit $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \beta_1\rangle > 0, \langle x, \beta_2\rangle > 0\}$ où $B = (\beta_1, \beta_2)$ est une base de R, et pour cette question, celle associée à l'ordre lexicographique. Nous reprendrons donc les dessins faits à la question III.5. Rappelons aussi que le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ peut être vus comme le produit des mesures algébriques $\overline{OM} \cdot \overline{OH}$, où H désigne le projeté orthogonal de N sur (OM). Par conséquent, $\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}\rangle > 0$ si le point X se trouve dans le demi-plan de frontière la perpendiculaire à (OM) passant par O et contenant le point M.

   Sur chacune des 4 figures, nous hachurerons en bleu le demi-plan $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \beta_1\rangle > 0\}$, en vert le demi-plan $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \beta_2\rangle > 0\}$ et donc en rouge l'ensemble C intersection des deux :



7. (a) **Montrer que pour toute chambre de Weyl C de R, il existe une base B de R telle que $C = C(B)$.**

   Soient C une chambre de Weyl, et B_0 la base de R associée à l'ordre lexicographique $\preceq$ sur $\mathbb{R}^n$. Une telle base existe (voir question III.4) et est l'ensemble des racines simples de R. La question 5.c permet d'écrire que $C(B_0)$ est une chambre de Weyl, donc il existe $w \in W$ tel que $w\big(C(B_0)\big) = C$ $(*_1)$ (car le groupe W opère transitivement sur les chambres de Weyl, question 4.c). Par suite, puisque w permute les éléments de R (question 3), $B = w(B_0)$ $(*_2)$ sera l'ensemble des racines simples pour la relation $\preceq'$ associée à w^{-1} (question II.1.b).

   De plus, notons $B_0 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$x \in C\big(w(B_0)\big) \Leftrightarrow \langle x, w(\beta_i)\rangle > 0 \Leftrightarrow \langle w^{-1}(x), \beta_i\rangle > 0 \Leftrightarrow w^{-1}(x) \in C(B_0) \Leftrightarrow x \in w\big(C(B_0)\big).$$

   On a donc $w\big(C(B_0)\big) = C\big(w(B_0)\big)$. Finalement, grâce à $(*_1)$ et $(*_2)$, on en déduit que $C = C(B)$.

   (b) **Montrer que l'application qui à une base B de R associe la chambre $C(B)$ est une bijection de l'ensemble des bases de R sur l'ensemble des chambres de R.**

Une telle application est nécessairement surjective d'après la question précédente.

Montrons alors qu'elle est injective. Soient $B_1 = (\beta_{1,1}, \dots, \beta_{n,1})$ et $B_2 = (\beta_{1,2}, \dots, \beta_{n,2})$ deux bases de R telles que $C(B_1) = C(B_2)$. Puisque $B_2 \subset R$, il vient que tout élément de B_2 s'écrit (introduction de la partie III) comme combinaison linéaire à coefficients dans $\pm\mathbb{N}$ d'éléments de la base B_1. Soient alors $x_1 \in B_1$ et $x_2 \in B_2$. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \pm\mathbb{N}$ tels que $x_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{i,1}$. Remarquons que $x_2 \in B_2$ implique $x_2 \in C(B_2)$ donc aussi $x_2 \in C(B_1)$ $(*)$. Alors

$$0 \overset{x_2 \neq 0}{<} \langle x_2, x_2 \rangle = \left\langle x_2, \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{i,1} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overbrace{\langle x_2, \beta_{i,1} \rangle}^{\overset{(*)}{>}0}.$$

On en déduit que $\sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$, et puisque tous les α_i sont de même signe, on a finalement $\alpha_i \geqslant 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. D'après la question III.1.b, $x_2 \in R^+$ relativement à la base B_1. Ce résultat étant valable pour tout $x_2 \in B_2$, il s'en suit que les racines positives relativement à B_2 coïncident avec les racines positives relativement à B_1. Enfin, les racines simples sont les mêmes pour B_1 et B_2, donc $B_1 = B_2$.

8. **Soit B une base de R, R^+ l'ensemble des racines positives et R^- l'ensemble des racines négatives.**

   (a) **Soient $\beta_1, \dots, \beta_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des éléments non nécessairement distincts de B tels que**

   $$s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) \in R^-.$$

   Montrer qu'il existe $q \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que

   $$s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}.$$

Posons

$$\begin{cases} \alpha_i = s_{\beta_i} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) & \text{si } i \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \alpha_p = \beta_p \end{cases}$$

Toujours d'après la question III.1.b, $\alpha_p \in R^+$. Par hypothèse, $\alpha_1 \in R^-$. Il existe alors q le plus petit entier de $\{1, \dots, p-1\}$ tel que $\alpha_{q+1} \in R^+$. Il vient alors que

$$s_{\beta_q}(\alpha_{q+1}) = s_{\beta_q}\big(s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p)\big) = s_{\beta_q} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) = \alpha_q \in R^-.$$

On remarque aussi que $a_{q+1} \in R^+$ et $\beta_q \in B$. Supposons alors que $\alpha_{q+1} \neq \beta_q$, de sorte que la question IV.3.b nous permette d'écrire que $s_{\beta_q}(\alpha_{q+1}) \in R^+$, ce qui est contradictoire avec le résultat précédent. Par suite, $\alpha_{q+1} = \beta_q$.

Posons ensuite $w = s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}$ $(\in O(\mathbb{R}^n))$. Grâce à la question IV.1, on a

$$\begin{aligned}
& w \circ s_{\beta_p} \circ w^{-1} = s_{w(\beta_p)} = s_{\alpha_{q+1}} = s_{\beta_q} \\
\Leftrightarrow\ & s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}} \circ s_{\beta_p} \circ s_{\beta_{p-1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q+1}} = s_{\beta_q} \\
\Leftrightarrow\ & s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_q} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}} \circ s_{\beta_p} \circ s_{\beta_{p-1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q+1}} = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_q} \circ s_{\beta_q} \\
\Leftrightarrow\ & s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_p} \circ s_{\beta_{p-1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q+1}} = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q-1}} \\
\Leftrightarrow\ & s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}.
\end{aligned}$$

(b) **En déduire que si $w \in W$ et $w \neq \mathrm{Id}$, alors il existe $\beta \in B$ tel que $w(\beta) \in R^-$.**

Soient $w \in W$ tel que $w \neq \mathrm{Id}$ et p le plus petit entier tel qu'il existe $\beta_1, \dots, \beta_p \in B$ vérifiant $w = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_p}$ (possible d'après la question IV.4.c). Dans l'énoncé de la question IV.4.b, on nous fait remarquer que $s_\beta(\beta) = -\beta$ pour tout élément $\beta \in B$, d'où

$$w(\beta_p) = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_p}(\beta_p) = -s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p).$$

Montrons alors par l'absurde que $w(\beta_p) \in R^-$. Supposons donc $w(\beta_p) \in R^+ \Leftrightarrow -s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) \in R^+ \Leftrightarrow s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) \in R^+$. Par application de la question VI.8.a,

$$\exists\, q \in \{1, \dots, p-1\} \mid w = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}},$$

ce qui contredit le fait que p soit minimal. D'où, en posant $\beta = \beta_p$, on trouve finalement $w(\beta) \in R^-$.

9. (a) **Montrer que le groupe de Weyl W de R *opère simplement transitivement* sur l'ensemble des bases de R, c'est-à-dire que pour deux bases B et B' données de R, il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(B) = B'$.**

Soit B une base de R. L'application $B \mapsto C(B)$ est une bijection (d'après VI.7.b), donc d'après la question VI.4.c, le fait que W opère transitivement sur les chambres de Wayl de R implique que W opère transitivement sur les bases de R.

Montrons encore qu'il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(B) = B'$ pour une autre base B' de R. Supposons que w_1, w_2 soient deux éléments de W vérifiant $w_1(B) = w_2(B) = B'$. Alors $w_2^{-1} \circ w_1(B) = B$. Si $w_2^{-1} \circ w_1 \neq \mathrm{Id}$, alors on a (question VI.8.b) $w_2^{-1} \circ w_1(\beta) \in R^-$ pour un certain $\beta \in B$. Mais ceci est impossible du fait que $w_2^{-1} \circ w_1(\beta) = \beta \in B \subset R^+$. Donc $w_2^{-1} \circ w_1 = \mathrm{Id} \Leftrightarrow w_1 = w_2$.

(b) **En déduire que le groupe de Weyl W de R opère simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de R.**

La transitivité de l'opération de W sur les chambres de Weyl a été démontrée dans le question VI.4.c.

Montrons encore que cette opération est simple. D'après VI.7.a, il existe une base B de R pour laquelle $C = C(B)$. Par suite,

$$C\big(w(B)\big) = w\big(C(B)\big) = C(B).$$

La question VI.7.b nous permet alors d'écrire que $w(B) = B$, et la démonstration de la question précédente nous assure que cette égalité est équivalente à $w = \mathrm{Id}$.