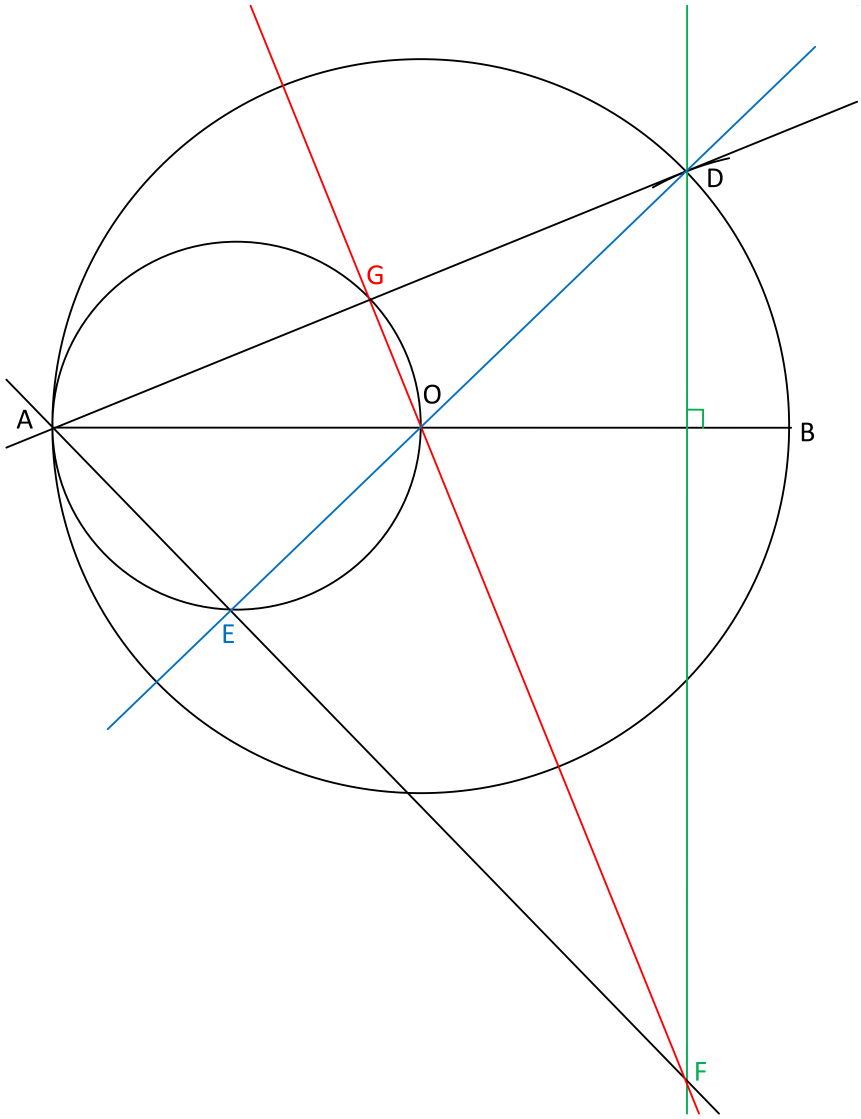
ÉNONCÉ ET CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N° 4 – 4ème

Exercice n° 66 p. 180

A. Construction de la figure

Tracer un segment [AB] de 8 cm de longueur. Placer son milieu O.
Tracer le cercle (𝒞) de diamètre [AB] et le cercle (𝒞') de diamètre [OA].
D est un point du cercle (𝒞) tel que BD = 3 cm.
La droite (DO) recoupe le cercle (𝒞') en E.
La perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point D coupe la droite (AE) en F.
La droite (FO) coupe la droite (AD) en G.



B. Raisonnement

1. a) Démontrer que les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.
   Les points O, A et E se trouvent tous les trois sur le même cercle (𝒞') dont un diamètre est un côté du triangle OAE. D'après la propriété 3 du cours, le triangle OAE est donc rectangle en E, c'est-à-dire que les droites (AE) = (AF) et (OE) = (DE) sont perpendiculaires.

   b) En déduire que le point O est le point de concours des hauteurs du triangle ADF.
   O est le point d'intersection des droites (DE) et (AB), qui sont toutes les deux des hauteurs du triangle ADF. O est donc l'orthocentre de ce triangle, c'est-à-dire le point de concours des hauteurs du triangle ADF.

   c) Quelle est la nature du triangle OAG ? Justifier la réponse.
   (OG) = (OF) est par conséquent la troisième hauteur du triangle ADF. Cela implique que les droites (OG) et (AD) = (AG) sont perpendiculaires, ou encore que le triangle OAG est rectangle en G.

   d) En déduire que le point G appartient au cercle (𝒞').
   Le triangle OAG est rectangle en G. D'après la propriété 1, son cercle circonscrit a donc pour diamètre l'hypoténuse [OA] de ce triangle : il s'agit justement du cercle (𝒞'). On en déduit que le point G appartient bien au cercle (𝒞').

2. Démontrer que le point G est le milieu du segment [AD].
   D'une manière analogue à la question 1.a), on démontrerait que les droites (AD) et (DB) sont perpendiculaires. Or deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles, donc les droites (DB) et (GO) sont parallèles.
   Dans le triangle ABD, le troisième théorème des milieux nous assure alors que le point G est le milieu du côté [AD].

3. En déduire que le triangle ADF est isocèle en F.
   Puisque (GF) est une droite perpendiculaire à [AD] passant par son milieu, il s'agit de sa médiatrice. D'après une propriété vue en 6ème, tout point de la médiatrice d'un segment se trouve à égale distance des extrémités de ce segment. Puisque F est un point de cette médiatrice, F est à égale distance des points A et D, c'est-à-dire FA = FD, ce qui signifie encore que le triangle ADF est bien rectangle en F.