EXERCICES DU LIVRE –
TRIANGLES ISOMETRIQUES ET SEMBLABLES

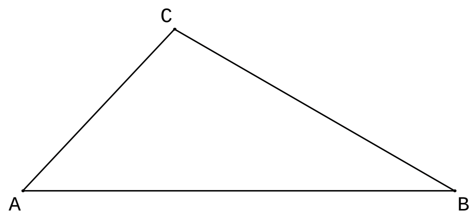
Exercice n° 1 p. 248

Puisque ABCDE est un pentagone régulier et que O en est le centre, on peut déjà dire que la rotation de centre O et d'angle 72° (= 360/5) transforme A en B, B en C, etc. et O en O.
En utilisant cette rotation, on en déduit facilement que

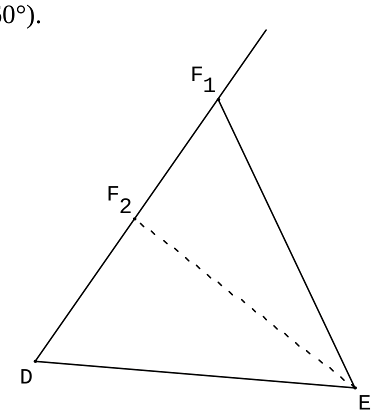
a) les triangles isométriques à ACD sont :
BDE, CEA, DAB et EBC.
b) les triangles isométriques à ABC sont :
BCD, CDE, DEA et EAB.
c) les triangles isométriques à OAB sont :
OBC, OCD, ODE et OEA.

Exercice n° 2 à 7 p. 248

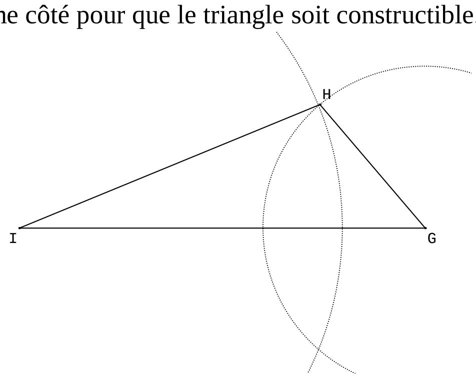
2. Oui, c'est le deuxième cas d'isométrie (« c – a – c »).



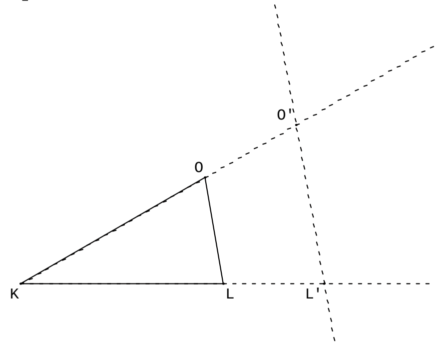
3. Non, car on peut placer le point F n'importe où sur la demi-droite issue de D (construire grâce à la condition $\widehat{D}$ = 60°).



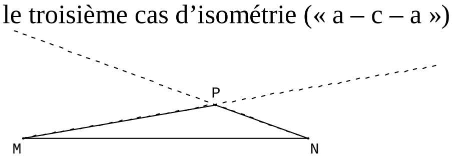
4. Oui, c'est le premier cas d'isométrie (« c – c – c »). Il faut toutefois s'assurer que la somme des longueurs de deux côtés soit plus grande que la longueur du troisième côté pour que le triangle soit constructible.



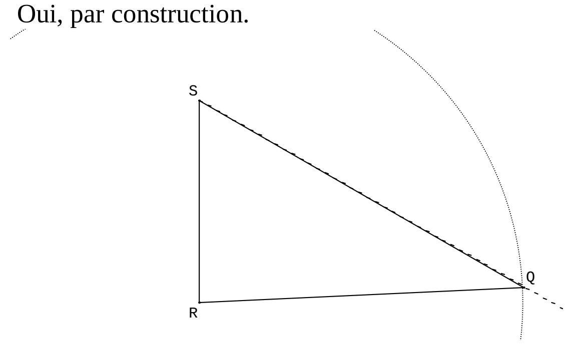
5. Non, car on peut être dans une situation de Thalès.



6. Oui, c'est le troisième cas d'isométrie (« a – c – a »)



7. Oui, par construction.



Exercice n° 8 p. 248

a) D'après le théorème de Thalès, puisque (MM') // (NN'), on a $\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'} = \frac{MM'}{NN'} = 1$ (car le codage de la figure suggère que MM' = NN'). Donc OM = ON et OM' = ON'. Par le premier cas d'isométrie, les triangles OMM' et ONN' sont isométriques.
b) On en déduit que, puisque O ∈ [MN] et OM = ON, O est le milieu de [MN]. Un raisonnement analogue permet d'affirmer que O est aussi le milieu de [M'N']

Exercice n° 9 p. 248

En utilisant les carreaux fournis par la figure, on montre aisément (grâce au théorème de Pythagore) que AE = BC, AD = AB et DE = AC. Par le premier cas d'isométrie, on en déduit que les triangles ABC et DEA sont isométriques.

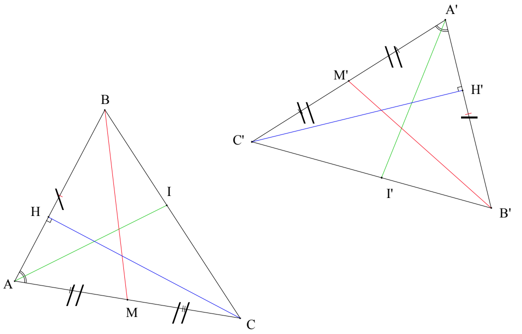
Ainsi, on peut affirmer que :
$\widehat{ABC} = \widehat{DEA}$, $\widehat{BCA} = \widehat{EAD}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{ADE}$.

Exercice n° 12 p. 248

a) La somme des angles d'un triangle est égale à 180°, donc dans le triangle ABC, $\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B}$. De même, dans le triangle DEF, $\widehat{E} = 180 - \widehat{D} - \widehat{F} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B}$ (d'après les hypothèses). Puisque BC = EF, le troisième critère d'isométrie permet d''ffirmer que les triangles ABC et DFE sont isométriques.

b) On en déduit que AB = DF et AC = DE.

Exercice n° 15 p. 249



a) ABC et A'B'C' isométriques impliquent que $\widehat{B} = \widehat{B'}$. D'après le troisième critère, AIB et A'I'B' sont isométriques, d'où AI = A'I'.

b) M étant le milieu de [AC], M' celui de [A'C'], et AC = A'C' impliquent que MC = M'C'. Puisque ABC et A'B'C' sont isométriques, on a $\widehat{C} = \widehat{C'}$ et BC = B'C'. Par le second critère, les triangles BMC et B'M'C' sont isométriques, d'où BM = B'M'.

c) $\widehat{BHC} = 90°$ et $\widehat{B'H'C'} = 90°$. Puisque $\widehat{B} = \widehat{B'}$, les angles des triangles BHC et B'H'C' sont respectivement égaux. Or BC = B'C', donc le troisième critère permet de conclure que les triangles BHC et B'H'C' sont isométriques, d'où CH = C'H'.

Exercice n° 16 p. 249

a) Je vous conseille d'avoir la figure sous la main. Par hypothèse, BD = AE ; et puisque ABC est isocèle, AB = CA. Il faut encore montrer que $\widehat{CAE} = \widehat{DBA}$.

$\widehat{CAE} = 180 - \widehat{DAB} - \widehat{BAC}$

$= 180 - \widehat{DAB} - (90 - \widehat{ABC}) = 90 - \widehat{DAB} + \widehat{ABC}$

$= 90 - (180 - \widehat{D} - \widehat{DBA}) + \widehat{ABC}$

$= -90 + \widehat{D} + \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = -90 + \widehat{D} + 180$

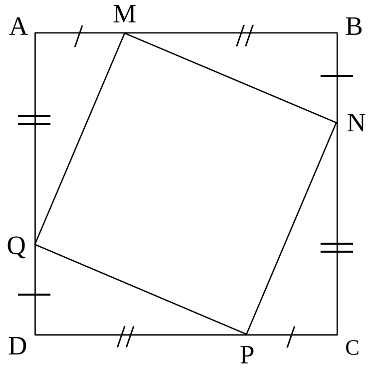
$= 90 + \widehat{D} = 90 + (90 - \widehat{DCA}) = 180 - \widehat{DCA}$

$= 180 - \widehat{CBA} = 180 - (180 - \widehat{DBA}) = \widehat{DBA}$.

Les triangles ABD et CAE sont isométriques grâce au deuxième critère d'isométrie.

b) On en déduit que $\widehat{BDA} = \widehat{AEC}$, c'est-à-dire $\widehat{CDE} = \widehat{DEC}$, donc CDE est isocèle en C.

Exercice n° 17 p. 249



a) Puisque ABCD est un carré, et que AM = BN = CP = DQ, on a aussi que BM = CN = DP = AQ. Les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ étant droit, le deuxième critère nous assure que les triangles AMQ, BNM, CPN et DQP sont isométriques.

b) Puisque AMQ et BNM sont isométriques, $\widehat{BMN} = \widehat{AQM}$. Donc $\widehat{AMQ} + \widehat{BNM} = \widehat{AMQ} + \widehat{AQM} = 180 - 90° = 90°$.

c) $\widehat{QMN} = 180° - (\widehat{AMQ} + \widehat{BMN}) = 90°$. Et puisque MN = NP = PQ = QM, MNPQ est un carré (un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur et qui possède un angle droit).

Exercice n° 19 p. 248

a) Soit s la symétrie de centre O. Alors s(ABCD) = CDAB et s(O) = O. $s(d) = d$ car d passe par O, et s((AB)) = s((DC)), donc s(M) = $s(d \cap$ (AB)) = $s(d) \cap s$((AB)) = $d \cap$ (DC) = s(N). Donc s(MOA) = NOC, et par définition, les triangles MOA et NOC sont isométriques, d'où AM = CN.

b) D'après ce qui précède, s(M) = N, s(A) = C, donc s([AM]) = [CN], et puisqu'une symétrie conserve les longueurs, AM = CN.

Exercice n° 21 p. 248

Puisque ABC est équilatéral et AI = BJ = CK, on a aussi AK = CJ = BI. Puisque $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$, le deuxième critère d'isométrie nous permet d'affirmer que les triangles AKI, BIJ et CJK sont isométriques. On en déduit que KI = IJ = JK, donc le triangle IJK est aussi équilatéral.

Exercice n° 23 p. 250

Le troisième angle du triangle $\mathscr{T}$ a pour mesure 180 – 72 – 37 = 71°. Le troisième angle du triangle $\mathscr{T}'$ a pour mesure 180 – 72 – 71 = 37°. Les deux triangles ont des angles de même mesure, ils sont donc semblables.

Exercice n° 25 p. 250

a) $$\frac{AM}{AB} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{6-3{,}6}{6} = \frac{2}{5}.$$

Par la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

$$\frac{AP}{AB} = \frac{1{,}4}{5} = \frac{7}{25} \text{ et } \frac{AQ}{AC} = \frac{1{,}6}{6} = \frac{4}{15}.$$

Par la contraposée du théorème de Thalès, els droites (PQ) et (BC) ne sont pas parallèles. Par suite, les droites (PQ) et (MN) ne le sont pas non plus.

b) Grâce aux angles correspondants, on montre aisément que les triangles AMN et ABC sont les seuls qui soient semblables sur cette figure.

Exercice n° 26 p. 250

a) D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad \text{et} \quad \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA''}{OB''}.$$

D'où en particulier $\frac{OA}{OB} = \frac{OA''}{OB''}$; et d'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que (AA") // (BB").

b) Grâce aux angles correspondants, on montre aisément que les triangles OAA' et OBB' sont semblables, de même que les triangles OAA" et OBB".

Exercice n° 27 p. 250

a) Puisque les sommets homologues sont inscrits dans le même ordre, d'autres angles égaux sont $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$.

b) Comme on l'a vu dans le cours, deux triangles ABC et EFD semblables vérifient :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{BC}{FD}.$$

Exercice n° 30 p. 250

Comme on l'a vu dans l'exercice précédent (et aussi dans le cours), les rapports des côtés homologues doivent être égaux. Or

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \text{ et } \frac{9}{13{,}5} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3},$$

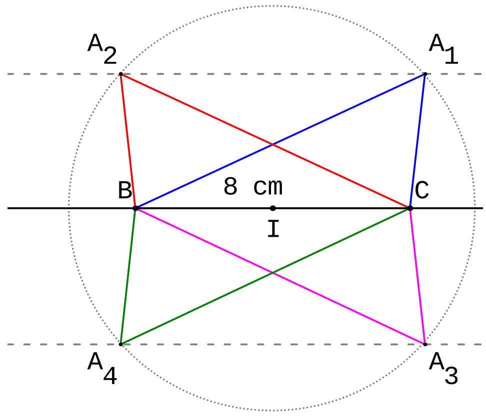
donc on cherche le côté c tel que $\frac{8}{c} = \frac{2}{3}$. Le produit en croix nous donne $2 \times c = 24$, donc $c = 12$.

Exercice n° 66 p. 253

a) La médiane issue de A doit avoir pour longueur 6 cm. On rappelle que la médiane issue de A est la droite qui relie le point A au milieu du côté opposé [BC], c'est-à-dire I, de sorte que dans ce cas, le segment [AI] doit avoir pour longueur 6 cm. On trace donc le cercle de centre I et de rayon 6 cm. On sait alors que les points A solutions du problème doivent se trouver sur ce cercle.

De plus, la hauteur issue de A doit avoir pour longueur 4 cm. On rappelle que la hauteur issue de A est la droite passant par A perpendiculaire au côté opposé [BC]. Pour tracer l'ensemble des points A tels que la hauteur ait une longueur de 4 cm, on tracer par exemple la perpendiculaire à (BC) en B, et on y place deux points de part et d'autre de B, situés chacun à 4 cm de B. Enfin, on trace les deux parallèles à (BC) passant par ces deux points, de sorte que chacune des deux droites soient espacées de 4 cm par rapport à (BC).

Puisque les triangles ABC doivent vérifier les deux conditions, le point A ne peut se trouver qu'à l'un des quatre intersections entre les droites et le cercle (voir figure) :

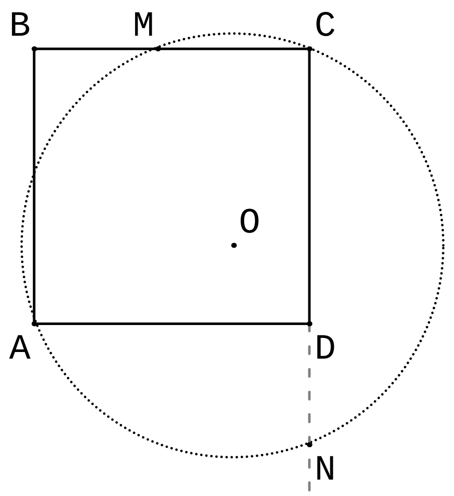


b) Par construction, les deux droites en pointillés, construites précédemment, sont images l'une de l'autre par la symétrique d'axe (BC). Puisque [BC] est un diamètre du cercle, le cercle est l'image de lui-même par cette même symétrie. En notant $s_{(BC)}$ cette symétrie, on a donc que $s_{(BC)}(A_1) = A_3$ et $s_{(BC)}(A_2) = A_4$. On a utilisé le fait l'image d'une intersection est l'intersection des images.

Le point I étant le centre du cercle, celui-ci est image de lui-même par la symétrie de centre I. De même, les deux droites parallèles sont à la même distance du point I, donc elles sont aussi images l'une de l'autre par la symétrie de centre I. Si l'on note s_I cette symétrie, on aura donc $s_I(A_1) = A_4$ et $s_I(A_2) = A_3$. On a aussi utilisé le fait l'image d'une intersection est l'intersection des images.

Finalement, en partant du point A_1 que l'on suppose construit, on aura $s_I(A_1BC) = A_4BC$; $s_{(BC)}(A_1BC) = A_3BC$; $s_{(BC)}(s_I(A_1BC)) = s_{(BC)}(A_4BC) = A_2BC$ (dans le dernier cas, on a utilisé une combinaison de transformations : on a d'abord appliqué s_I, puis on a appliqué $s_{(BC)}$ au résultat). Dans tous les cas, les trois autres triangles sont images du premier par une transformation ou une combinaison de transformations : tous les triangles sont donc isométriques.

Exercice n° 68 p. 253



1. a) Puisque ABCD est un carré, le triangle MCN est rectangle en C. Or M, N et C appartiennent au cercle c, donc [MN], l'hypoténuse de MCN, en est un diamètre (théorème vu dans le cours). Puisque [MN] est un diamètre de ce cercle qui contient aussi le point A, la réciproque du théorème utilisé précédemment nous assure que le triangle MAN est rectangle en A, c'est-à-dire que l'angle MAN = 90°.

   b) On a ACM = 45° car ABCD est un carré et A se trouve donc sur la bissectrice de BCD. Or A, C et M sont sur c. Par le théorème de l'angle au centre, on en déduit que AOM = 2 x 45° = 90°. De même, ACN = 45° implique par le même théorème que AON = 90°.

   La première égalité d'angle nous assure que (OM) est la perpendiculaire à (AO) passant par O, et la seconde nous apprend que (ON) est la perpendiculaire à (AO) passant par O. Les deux droites (OM) et (ON) sont donc les mêmes : les points N, O, M sont donc alignés. De plus, OM = OA = ON car ce sont des rayons de c, donc (OA) est bien la médiatrice de [MN].

   c) Puisque OM = OA = ON et que AOM = AON = 90°, le critère d'isométrie n° 2 nous apprend que les triangles AOM et AON sont isométriques (ils sont même isocèles rectangles en O). En particulier, AM = AN. On savait déjà que AB = AD car ABCD est un carré. De plus, BAM = 90° – MAD et DAN = MAN – MAD. Or MAN = MAO + NAO = 45° + 45° = 90°, donc DAN = 90° – MAD, de sorte que BAM = DAN. A nouveau, le critère d'isométrie n° 2 permet de conclure que les triangles BAM et DAN sont isométriques, d'où BM = DN.

2. a) *Remarque préliminaire* : r est donc la rotation de centre A et d'angle –90°. L'image de la droite (BC) par r est la droite passant par les images par r de B et C : c'est donc la droite (DA) (car B est transformé en D, et C en A).

   b) r(M) = N, car on a vu précédemment que MAN = 90° et AN = AM (il faut juste être vigilant sur le sens de rotation !!)

Exercice n° 70 p. 253

a) Les triangles ABH, ABC, HNC, BMH, AMH, ANH, AHI, MHN, AMN et AHC sont rectangles, il y en a bien dix.

b) Partons de ABC :

- <u>ABH</u> : l'angle $\hat{B}$ est commun aux deux triangles, donc ils sont semblables (rappel : l'autre angle étant droit dans les deux triangles, celui qui « manque » aura la même mesure dans les deux triangles).
- <u>HNC et AHC</u> : l'angle $\hat{C}$ est commun aux deux triangles, donc ils sont semblables.
- <u>BMH</u> : l'angle $\hat{B}$ est commun.
- <u>AMH</u> : $\widehat{BHM} = 180 - 90 - \widehat{ABH} = \widehat{MAH}$, donc AMH et BMH sont semblables, et par suite, AMH et ABC le sont aussi (car on vient de démontrer que BMH et ABC le sont).
- <u>ANH</u> : ANHM est un rectangle d'après le codage (3 angles droits), d'où AN = HM, NH = MA et [AH] côté commun impliquent NAH et MHA isométriques, donc NAH et ABC semblables.
- <u>MHN</u> : ANHM est un rectangle, donc HN = MA, MN = HA et [MH] côté commun impliquent que MHN et HMA isométriques, d'où MHN et ABC semblables.
- <u>AMN</u> : Comme pour ANH, AMN et HNM sont isométriques, donc en particulier, AMN et ABC sont semblables.

c) Nous avons déjà vu que ANHM est un rectangle, donc ses diagonales se coupent en leur milieu O. Autrement dit, [AH] coupe [MN] en son milieu O, donc (AH) est la médiane issue de A du triangle AMN.
Puisque ABC est rectangle en A et I milieu de [BC], on a AI = BI, donc ABI est isocèle en I. Par suite $\hat{B} = \widehat{IBA} = \widehat{IAB}$. De plus, $\widehat{AMN} = \widehat{ACB} = \hat{C}$ car les triangles AMN et ACB sont semblables. Par conséquent, les triangles OAM et ABC sont semblables, d'où $\widehat{AOM}$ est droit, c'est-à-dire que (AO) = (AI) est la hauteur issue de A du triangle AMN.