Exercice n° 1 p. 124

a) Le premier membre vaut :
$$2\sqrt{5}\,(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$$
Le second vaut :
$$\sqrt{10}\,(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{10} + \sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{10} + \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$$
L'égalité est donc VRAIE.

b) L'égalité est FAUSSE, car le premier membre vaut environ 3,97 alors que le second vaut environ 2,83.

c) On a :
$$\sqrt{20} + \sqrt{80} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{16 \times 5}$$
$$= 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$
L'égalité est donc VRAIE.

Exercice n° 2 p. 124

Soit x un réel. On part du deuxième membre :
$$(x - 1)(2x - 1)(2 - x)$$
$$= (2x^2 - x - 2x + 1)(2 - x)$$
$$= (2x^2 - 3x + 1)(2 - x)$$
$$= 4x^2 - 2x^3 - 6x + 3x^2 + 2 - x$$
$$= -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2.$$

On retrouve le premier membre, ce qui prouve que l'égalité est VRAIE pour tout réel x.

Exercice n° 3 p. 124

Contrairement à l'exercice précédent, on part ici de chacun des membres en les développant :

$(3x - 4)(2x + 3)$	$(3x - 2)(x + 6) + 3x\,(x - 5)$
$= 6x^2 + 9x - 8x - 12$	$= 3x^2 + 16x - 12 + 3x^2 - 15x$
$= 6x^2 + x - 12.$	$= 6x^2 + x - 12.$

Nous trouvons le même résultat, on peut donc en déduire que l'égalité de départ est VRAIE pour tout réel x.

Exercice n° 4 p. 124

Soit $a > 0$. Alors :
$$\frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2},$$
et l'égalité est démontrée.

Les exercices 5 et 6 ont été faits avant de voir la rédaction correcte de la résolution d'une équation. Je me contenterai donc de ne donner que les résultats de ces exercices.

Exercice n° 5 p. 124

a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{8}\right\}$ b) $\mathcal{S} = \{6\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{23}{5}\right\}$

Exercice n° 6 p. 124

a) $\mathcal{S} = \{-2\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) $\mathcal{S} = \{-7\}$ d) $\mathcal{S} = \{3\}$

Exercice n° 8 p. 124

Il n'y a pas de conditions sur cette équation que l'on appelle (E).

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{3(x+3)}{6} - \dfrac{2(x-1)}{6} = \dfrac{x+5}{6} + \dfrac{6}{6}$

(E) $\Leftrightarrow 3(x + 3) - 2(x - 1) = x + 11$ cf (3)

(E) $\Leftrightarrow 3x - 2x - x = -9 - 2 + 11$ cf (2)

(E) $\Leftrightarrow 0\,x = 0$

A ce stade, on peut constater que toutes les valeurs réelles de x sont solutions de cette équation, on en conclut que $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Exercice n° 9 p. 124

a) $\dfrac{5x + 1}{3} = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$

b) Appelons (E) l'équation.
Elle n'admet pas de conditions spéciales. Donc

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}x - 4$

(E) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{2}\right)x = -4 - \dfrac{1}{3}$

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{7}{6}x = -\dfrac{13}{3}$

(E) $\Leftrightarrow x = -\frac{13}{3} \times \frac{6}{7} = -\frac{26}{7}$. cf (4)

Donc $\mathscr{S} = \left\{-\frac{26}{7}\right\}$.

Exercice n° 11 p. 125

a) Cette équation (E_1) n'admet pas de conditions.
On passe donc à la résolution :
(E_1) $\Leftrightarrow 5x - 3 = 0$ ou $2 - 3x = 0$ cf (5)
(E_1) $\Leftrightarrow 5x = 3$ ou $-3x = -2$ cf (2)
(E_1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$ ou $x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ cf (4)

D'où $\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{3}{5} ; \frac{2}{3}\right\}$

b) Cette équation (E_2) n'admet pas de conditions.
On passe donc à la résolution :
(E_2) $\Leftrightarrow 3x = 0$ ou $2x - 7 = 0$ cf (5)
(E_2) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x = 7$ cf (4), (1)
(E_2) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{7}{2}$ cf (4)

D'où $\mathscr{S}_2 = \left\{0 ; \frac{7}{2}\right\}$

c) Cette équation (E_3) n'admet pas de conditions.
On passe donc à la résolution :
(E_3) $\Leftrightarrow -3x^2 = 0$ ou $2x - 7 = 0$ cf (5)
(E_3) $\Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $2x = 7$ cf (4), (1)
(E_3) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{7}{2}$ cf (5), (4)

D'où $\mathscr{S}_3 = \left\{0 ; \frac{7}{2}\right\}$

d) Cette équation (E_4) n'admet pas de conditions.
On passe donc à la résolution :
(E_4) $\Leftrightarrow -3x + 1 = 0$ cf (5)
(E_4) $\Leftrightarrow -3x = -1$ cf (2)
(E_4) $\Leftrightarrow x = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ cf (4)

D'où $\mathscr{S}_4 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

e) Cette équation (E_5) n'admet pas de conditions.
On passe donc à la résolution :
(E_5) $\Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $-3 - 2x = 0$ cf (5)
(E_5) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $-3 = 2x$ cf (5), (1)
(E_5) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{3}{2}$ cf (4)

D'où $\mathscr{S}_5 = \left\{-\frac{3}{2} ; 0 ; 1\right\}$

f) Cette équation (E_6) n'admet pas de conditions. On passe donc à la résolution :
(E_6) $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $2x + 3 = 0$ ou $x - 4 = 0$ cf (5)
(E_6) $\Leftrightarrow x = 1$ ou $2x = -3$ ou $x = 4$ cf (1), (2)
(E_6) $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 4$ cf (4)

D'où $\mathscr{S}_5 = \left\{-\frac{3}{2} ; 1 ; 4\right\}$

Exercice n° 13 p. 125

a) (E_1) : $(x - 2)(2x + 1) + 3(2x + 1) = 0$
(E_1) $\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2 + 3) = 0$
(E_1) $\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 1) = 0$
(E_1) $\Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ cf (5)
(E_1) $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -1$. cf (2), (4)

D'où $\mathscr{S}_1 = \left\{-1 ; -\frac{1}{2}\right\}$

b) (E_2) : $(5x + 1)^2 - 2x\,(5x + 1) = 0$
(E_2) $\Leftrightarrow (5x + 1)\,[(5x + 1) - 2x] = 0$
(E_2) $\Leftrightarrow (5x + 1)(3x + 1) = 0$
(E_2) $\Leftrightarrow 5x + 1 = 0$ ou $3x + 1 = 0$ cf (5)
(E_2) $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$ ou $x = -\frac{1}{3}$ cf (2), (4)

D'où $\mathscr{S}_2 = \left\{-\frac{1}{3} ; -\frac{1}{5}\right\}$

c) (E_3) : $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 0$
(E_3) $\Leftrightarrow [(2x + 3) - (x - 2)]\,[(2x + 3) + (x - 2)] = 0$
(E_3) $\Leftrightarrow (x + 5)(3x + 1) = 0$
(E_3) $\Leftrightarrow x + 5 = 0$ ou $3x + 1 = 0$ cf (5)
(E_3) $\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = -\frac{1}{3}$ cf (2), (4)

D'où $\mathscr{S}_3 = \left\{-5 ; -\frac{1}{3}\right\}$

d) (E_4) : $3(x - 1)^2 + 4x - 4 = 0$
(E_3) $\Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + 4(x - 1) = 0$
(E_3) $\Leftrightarrow (x - 1)\,[3(x - 1) + 4] = 0$
(E_3) $\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 1) = 0$
(E_4) $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $3x + 1 = 0$ cf (5)
(E_4) $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$ cf (1), (2), (4)

D'où $\mathscr{S}_4 = \left\{-\frac{1}{3} ; 1\right\}$

Exercice n° 15 p. 125

a) $(E_1) : x(1-5x) = 1-5x$

$(E_1) \Leftrightarrow x(1-5x) - (1-5x) = 0$ cf (2)

$(E_1) \Leftrightarrow (1-5x)(x-1) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow 1-5x = 0$ ou $x-1 = 0$ cf (5)

$(E_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$ ou $x = 1$ cf (1), (4)

D'où $\mathcal{S}_1 = \left\{\dfrac{1}{5} ; 1\right\}$

b) $(E_2) : (4x+1)^2 = x^2$

$(E_2) \Leftrightarrow (4x+1)^2 - x^2 = 0$ cf (2)

$(E_2) \Leftrightarrow (4x+1-x)(4x+1+x) = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow 3x+1 = 0$ ou $5x+1 = 0$ cf (5)

$(E_2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ ou $x = -\dfrac{1}{5}$ cf (2), (4)

D'où $\mathcal{S}_2 = \left\{-\dfrac{1}{3} ; -\dfrac{1}{5}\right\}$

c) $(E_3) : (x+2)^2 = (1-2x)\left(3 - \dfrac{1}{2}x\right)$

$(E_3) \Leftrightarrow (x+2)^2 - (1-2x)\left(3 - \dfrac{1}{2}x\right) = 0$ cf (2)

$(E_3) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 3 + \dfrac{1}{2}x + 6x - x^2 = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow x\left(4 + 6 + \dfrac{1}{2}\right) = -1$ cf (2)

$(E_3) \Leftrightarrow \dfrac{21}{2}x = -1$

$(E_3) \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{21}$ cf (3)

D'où $\mathcal{S}_3 = \left\{-\dfrac{2}{21}\right\}$

Quelques commentaires : Pour la plupart des équations, il s'agira de factoriser (soit en trouvant un facteur commun, soit en utilisant une identité remarquable) afin d'arriver à une « équation produit ». Mais on ne peut pas toujours factoriser (cas c), il faudra alors développer et espérer que les termes les plus embêtants s'élimineront…

Exercice n° 17 p. 125

a) condition : $4x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{5}{4}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-3}{4x+5} = 0 \\ x \neq -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 = 0 \\ x \neq -\dfrac{5}{4} \end{cases}$ cf(3)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ x \neq -\dfrac{5}{4} \end{cases}$ cf (1), (4)

d'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

b) condition : $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2x+1} = 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ cf (3)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ cf (4)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d'où $\mathcal{S} = \{0\}$

c) condition : $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ cf (3)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ cf (5)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ x \neq -1 \end{cases}$ cf (1), (2)

d'où $\mathcal{S} = \{1\}$ (–1 est **valeur interdite** !!!!)

d) Condition : $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-3)}{2x+1} = 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) = 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{cf (3)}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 3 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{cf (5), (2), (1)}$$

d'où $\mathcal{S} = \{-1 ; 3\}$.

Exercice n° 18 p. 125

Je ne développerai pas tout le calcul, juste ce qui est demandé par l'énoncé.

a) condition : $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+3} = 1 \\ x \neq -3 \end{cases} \qquad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

d'où $\mathcal{S} = \{4\}$

b) condition : $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2x}{1+x} = 3 \\ x \neq -1 \end{cases} \qquad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 3 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

d'où $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$

c) condition : $x \neq 0$ et $3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3x} \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

d'où $\mathcal{S} = \{-1\}$

d) condition : $x + 1 \neq 0$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{x+1} = \dfrac{2}{x} \\ x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2 = 0 \\ x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \end{cases}$$

d'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

Exercice n° 19 p. 125

Pour cet exercice, je ne donne que la solution. S'il y a encore des problèmes de rédaction, demandez-le moi.

a) $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$

c) $\mathcal{S} = \{-1\}$ d) $\mathcal{S} = \{3\}$

Exercice n° 20 p. 125

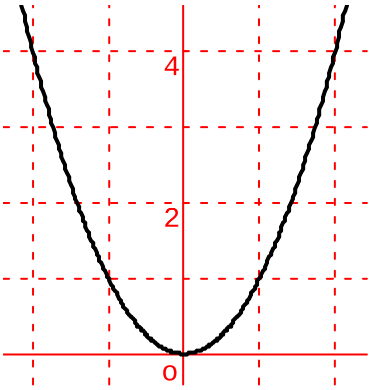
Il est bon rappeler que résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = k$, avec k réel, revient à déterminer graphiquement les antécédents de k par la fonction f. Ceci dit, ce sont quand même des équations qui méritent donc un ensemble solution !!!

a) $\mathcal{S} = \{2\}$ b) $\mathcal{S} = \{-2 ; 2\}$

c) $\mathcal{S} = \{-3 ; 0\}$ d) $\mathcal{S} = \{-4\}$ e) $\mathcal{S} = \varnothing$

Exercice n° 21 p. 125

1.



2. Nombre de solutions de chaque équation :

a) 2
b) 2
c) 2
d) 0

Résolutions :

a) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

b) $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

c) $x^2 = 3{,}2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3{,}2}$ ou $x = \sqrt{3{,}2}$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ ou $x = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

d) $x^2 = -5$ n'a pas de solutions puisqu'un carré n'est jamais négatif.

Exercice n° 22 p. 125

1. $(E_1) : x^2 = 2 \quad \leftrightarrow \quad$ ②

$(E_2) : \dfrac{1}{x} = 2 \quad \leftrightarrow \quad$ ③

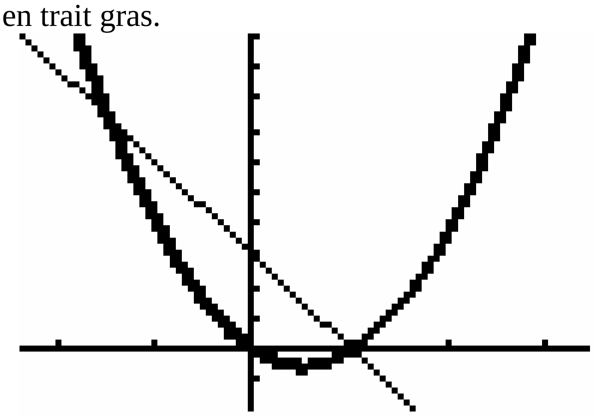
$(E_3) : \sqrt{x} = 2 \quad \leftrightarrow \quad$ ①

2. $(E_1) \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$
   d'où $\mathcal{S}_1 = \{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}$
   $(E_2) \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, d'où $\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
   $(E_3) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$, d'où $\mathcal{S}_3 = \{4\}$

3. Nombre de solutions de chaque équation :
   a) 0 b) 1 c) 1 d) 0 e) 1 f) 1

Exercice n° 27 p. 126

1. Voici la capture d'écran obtenue, après avoir effectué un petit zoom. La courbe de f est celle en trait gras.



2. On peut alors conjecturer graphiquement que les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont environ – 1,5 et 1.

3. (E) : $f(x) = g(x)$
   (E) $\Leftrightarrow 2x\,(x - 1) = -3x + 3$
   (E) $\Leftrightarrow 2x\,(x - 1) = -3(x - 1)$
   (E) $\Leftrightarrow 2x\,(x - 1) + 3(x - 1) = 0$ cf (1)
   (E) $\Leftrightarrow (x - 1)(2x + 3) = 0$
   (E) $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{3}{2}$ cf (5), (2), (4)
   d'où $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}\ ;\ 1\right\}$, et nos solutions conjecturées correspondent.

Exercice n° 28 p. 126

Dans un tel problème, quatre étapes sont à respecter :
1. Choix de l'inconnue ;
2. Mise en équation du problème ;
3. Résolution de l'équation déterminée ;
4. Conclusion au problème.

Dans notre cas, cela donne :

1. Soit n le nombre entier du milieu.
2. Alors l'entier le précédent s'écrit $(n - 1)$ et celui le suivant s'écrit $(n + 1)$. L'équation est alors la suivante :
   $(n - 1) + n + (n + 1) = 2001$.
3. Appelons cette équation (E). Alors
   (E) $\Leftrightarrow 3n = 2001$
   (E) $\Leftrightarrow n = 2001/3 = 667$ cf (4)
4. Les trois nombres consécutifs recherchés sont donc 666, 667 et 668 (n'oublions pas que n a été choisi comme étant celui du milieu !!!)

Exercice n° 29 p. 126

Soit x la longueur initiale du côté du carré.

Alors la longueur du côté du « carré réduit » est de $x - 2$, et l'aire du carré réduit est de $x^2 - 52$. Mais cette aira correspond aussi à $(x - 2)^2$. Donc on a à résoudre l'équation $(x - 2)^2 = x^2 - 52$.

Appelons cette équation (E). Alors
(E) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 52$
(E) $\Leftrightarrow -4x = -52 - 4$ cf (2)
(E) $\Leftrightarrow x = \frac{-56}{-4} = \frac{56}{4} = 14$ cf (4)

La longueur initiale du carré est de 14 cm.

Exercice n° 30 p. 126

Soit n le nombre de touristes initialement prévus.

Après les 4 désistements, il reste $n - 4$ touristes. Ils ont donc réglé en tout $13(n - 4)$ €. Si aucun touriste n'était absent, ils auraient réglé $11n$ €. Il faut donc résoudre l'équation $13(n - 4) = 11n$.

Notons (E) cette équation. On a alors :
(E) $\Leftrightarrow 13n - 52 = 11n$
(E) $\Leftrightarrow 2n = 52$ cf (1), (2)
(E) $\Leftrightarrow n = 26$ cf (4)

Il y avait donc 26 touristes initialement prévus.

Exercice n° 32 p. 126

Soient d la distance (en km) du trajet, et v la vitesse (en h). On rappelle qu'on a la relation $d = vt$, où v représente la durée du trajet et t sa durée.

Alors d'après l'énoncé, $d = 6{,}75v$ (car 6 heures et 45 minutes représentent 6,75 heures). De plus, et toujours d'après l'énoncé, $d = 6(v + 10)$.

D'où l'équation (E) : $6{,}75v = 6(v + 10)$.
(E) $\Leftrightarrow 6{,}75v - 6v = 60$
(E) $\Leftrightarrow 0{,}75v = 60$
(E) $\Leftrightarrow v = \dfrac{60}{0{,}75} = 80$.

La vitesse est donc de 80 km/h. Grâce à la première équation déterminée, on sait que l'on a alors $d = 6{,}75 \times 80 = 540$ km.

Exercice n° 34 p. 126

a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{260}{390}$ et $\dfrac{87}{130} = \dfrac{261}{390}$.
L'inégalité est donc FAUSSE.
b) $41152 \times 370368 - 617285 \times 24691 = 1$,
donc l'inégalité est FAUSSE.

Attention : si l'on tape les deux fractions à la calculatrice, on pourrait penser que ces deux fractions sont les mêmes, ce qui n'est pas le cas. Ceci est dû à la mémoire limitée de la calculatrice, qui ne mémorise que 10 chiffres en tout…

Exercice n° 35 p. 126

a) VRAI, car $4 - 3 = 1$, et $1 \geqslant 0$;
b) FAUX, car ce n'est pas LA seule solution (en effet, 4 l'est aussi, d'après a)
c) FAUX, car 3 est aussi solution ;
d) FAUX, car ce ne sont pas les seules solutions (3 l'est aussi).

Remarque : Pour montrer qu'une propriété est fausse, il suffit de trouver UN contre-exemple (et ça suffit !!).

Exercice n° 36 p. 127

a) $(I_1) : 7x + 4 \leqslant -8x - 1$
$(I_1) \Leftrightarrow 7x + 8x \leqslant -1 - 4$ cf (a), (b)
$(I_1) \Leftrightarrow 15x \leqslant -5$
$(I_1) \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{5}{15}$ cf (d)
$(I_1) \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{1}{3}$
Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{3}\right]$

b) $(I_2) : \dfrac{3}{4}x \leqslant 0$
$(I_2) \Leftrightarrow x \leqslant 0$ cf (d)
Donc $\mathcal{S} =]-\infty ; 0]$

c) $(I_3) : -5x \geqslant \dfrac{1}{4}$
$(I_3) \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{4} \div (-5)$ cf (d)
$(I_3) \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{1}{5}\right)$
$(I_3) \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{1}{20}$
Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{20}\right]$

d) $(I_4) : \dfrac{x + 3}{-2} \geqslant 0$
$(I_4) \Leftrightarrow x + 3 \leqslant 0$ cf (c)
$(I_4) \Leftrightarrow x \leqslant -3$
Donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -3]$

e) $(I_5) : (x - 5)^2 \geqslant 0$
Puisque qu'un carré est toujours positif, cette inéquation est vérifiée pour tout x réel, donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

f) $(I_6) : x^2 + (x - 1)^2 \leqslant -1$
Puisqu'un carré est toujours positif, la somme de deux carrés le sera aussi, et ne peut donc être inférieure à un nombre négatif. Cette inéquation n'admet donc pas de solution, donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

Exercice n° 37 p. 127

On rappelle comment on fait pour déterminer le signe d'une expression de type $ax + b$:

- on résout $ax + b = 0$ et on place la valeur trouvée dans la ligne x du tableau de signes ;
- à droite du zéro, on met le signe qui correspond à celui du coefficient a ;
- à gauche du zéro, on met donc le signe opposé.

Selon ces règles, nous pouvons facilement répondre aux questions de l'exercice :

a) $\frac{4}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$:

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
$\frac{4}{3}x - 1$		$-$	0	$+$	

b) $3 - 5x = 0 \Leftrightarrow 3 = 5x \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$:

x	$-\infty$		$3/5$		$+\infty$
$3 - 5x$		$+$	0	$-$	

c) $-\frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-\frac{3}{2}x$		$+$	0	$-$	

Exercice n° 51 p. 127

a) $(I_1) : \frac{x+1}{3-x} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+1}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

D'où $\mathcal{S} = [-1 ; 3[$.

b) $(I_2) : \frac{5-4x}{2x-1} \leqslant 0$

x	$-\infty$		$1/2$		$5/4$		$+\infty$
$5 - 4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{5-4x}{2x-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

D'où $\mathcal{S} = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{5}{4};+\infty\right[$

Exercice n° 53 p. 127

a) $(I_1) : \frac{x+4}{5-x} < 2$

$(I_1) \Leftrightarrow \frac{x+4}{5-x} - 2 < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \frac{x+4-2(5-x)}{5-x} < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \frac{3x-6}{5-x} < 0$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$3x - 6$		$-$	0	$+$		$+$	
$5 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{3x-6}{5-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

D'où $\mathcal{S} =]-\infty ; 2[\cup]5 ; +\infty[$.

b) $(I_2) : \frac{-5}{2x+1} \geqslant 1$

$(I_2) \Leftrightarrow \frac{-5}{2x+1} - 1 \geqslant 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \frac{-5-(2x+1)}{2x+1} \geqslant 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \frac{-2x-6}{2x+1} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		$+\infty$
$-2x - 6$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x-6}{2x+1}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

D'où $\mathcal{S} = \left[-3;-\frac{1}{2}\right[$

Exercice n° 54 p. 127

a) $(I_1) : \frac{2x+3}{x-1} \geqslant 4$

$(I_1) \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 \geqslant 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \frac{2x+3-4(x-1)}{x-1} \geqslant 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} \geqslant 0$

x	$-\infty$		1		$7/2$		$+\infty$
$-2x + 7$		$+$		$+$	0	$-$	
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+7}{x-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

D'où $\mathcal{S} = \left]1;\frac{7}{2}\right]$

b) $(I_2) : \dfrac{5}{x+3} < \dfrac{2}{x}$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{2}{x} < 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{5x - 2(x+3)}{x(x+3)} < 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x-6}{x(x+3)} < 0$

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{5-4x}{2x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

D'où $\mathcal{S} =]-\infty\,; -3[\cup]0\,; 2[$.

Exercice n° 61 p. 128

Soit n l'entier du milieu. Alors l'énoncé se traduit par :

$(I) : 2999 \leqslant (n-1) + n + (n+1) \leqslant 3001$

$(I) \Leftrightarrow 2999 \leqslant 3n \leqslant 3001$

$(I) \Leftrightarrow \dfrac{2999}{3} \leqslant n \leqslant \dfrac{3001}{3}$

Or il n'existe qu'un seul entier (n DOIT être entier d'après l'énoncé) compris entre 2999/3 et 3001/3, c'est $n = 1000$.

Les trois nombres entiers consécutifs dont la somme est comprise entre 2999 et 3001 sont donc :

999, 1000, 1001.

Exercice n° 63 p. 128

L'aire $\mathcal{A}$ de la couronne est donnée $\mathcal{A}_{\mathcal{C}'} - \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi\,(x+2)^2 - \pi\,x^2\\ &= \pi\,[(x+2)^2 - x^2]\\ &= \pi\,(x+2-x)(x+2+x)\\ &= 2\pi\,(2x+2)\\ &= 4\pi\,(x+1)\end{aligned}$$

Cette aire doit être inférieure à 100 cm^2, donc on a à résoudre l'inéquation :

$(I) : 4\pi\,(x+1) \leqslant 100$

$(I) \Leftrightarrow x + 1 \leqslant \dfrac{100}{4\pi}$

$(I) \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{25}{\pi} - 1.$

Enfin, x est une longueur, donc une quantité positive, et on en déduit que

$\mathcal{S} = \left[0\,; \dfrac{25}{\pi} - 1\right]$

Exercice n° 64 p. 128

Une fois le patron replié, la boîte admet pour volume $4a^2$ (hauteur $\times$ aire de la base). Ce volume devant être supérieur à 1600 cm^3, il faut résoudre l'inéquation $(I) : 4a^2 \geqslant 1600$.

$(I) \Leftrightarrow a^2 \geqslant 400$

$(I) \Leftrightarrow a^2 - 400 \geqslant 0$

$(I) \Leftrightarrow (a-20)(a+20) \geqslant 0$

Or $a + 20$ est toujours positif car a est une longueur, donc $(I) \Leftrightarrow a - 20 \geqslant 0$, d'où $a \geqslant 20$.

Exercice n° 86 p. 130

a) $(E_1) : \dfrac{6x - 3x^2}{x^2 - 4} = 0.$

Conditions : $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E_1) \Leftrightarrow 6x - 3x^2 = 0$ cf (3)

$(E_1) \Leftrightarrow x\,(6 - 3x) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x = 0$ ou $6 - 3x = 0$ cf (5)

$(E_1) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

D'où $\mathcal{S} = \{0\}$.

b) $(E_2) : \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} = 3$

Conditions : $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$(E_2) \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} - 3 = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2 + (x-1)^2 - 3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow \dfrac{(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) - 3(x^2 - 1)}{(x-1)(x+1)} = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow -x^2 + 5 = 0$ cf (3)

$(E_2) \Leftrightarrow (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$ cf (1), (2) D'où $\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\}$.

c) $(E_3) : \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{14}{x-3} - \dfrac{9}{x-2}$

$(E_3) \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{14(x-2)-9(x-3)}{(x-3)(x-2)}$

$(E_3) \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{5x-1}{(x-3)(x-2)}$

$(E_3) \Leftrightarrow (5x-1)(x-1)(x+1) = (5x-1)(x-3)(x-2)$

$(E_3) \Leftrightarrow (5x-1)(x-1)(x+1) - (5x-1)(x-3)(x-2) = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow (5x-1)\,[(x-1)(x+1) - (x-3)(x-2)] = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow (5x-1)\,[(x^2-1) - (x^2-5x+6)] = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow (5x-1)\,(x^2-1-x^2+5x-6) = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow (5x-1)\,(5x-7) = 0$

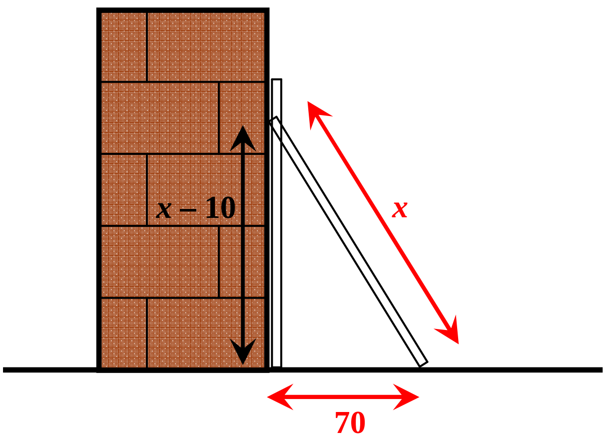
$(E_3) \Leftrightarrow 5x-1 = 0$ ou $5x-7 = 0$ cf (5)

$(E_3) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$ ou $x = \dfrac{7}{5}$ cf (1), (4)

D'où (enfin !) $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{7}{5}\right\}$

Exercice n° 93 p. 131

Soit x la longueur de l'échelle (en cm). Faisons un schéma :



L'équation est donnée par le théorème de Pythagore, puisqu'on connaît les trois longueurs d'un triangle rectangle :

$(E) : (x-10)^2 + 70^2 = x^2$

$(E) \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 + 4900 = x^2$

$(E) \Leftrightarrow -20x + 5000 = 0$

$(E) \Leftrightarrow 20x = 5000$ cf (1)

$(E) \Leftrightarrow x = \dfrac{5000}{20} = 250$ cf (4)

L'échelle mesure donc 2,50 m.

Exercice n° 95 p. 131

a) $(I_1) : \dfrac{2}{x+2} \leqslant x+1$ condition : $x \neq -2$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+2} - (x+1) \leqslant 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{2-(x+1)(x+2)}{x+2} \leqslant 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{2-(x^2+3x+2)}{x+2} \leqslant 0$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{-x\,(x+3)}{x+2} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$-x$		+		+		+	0	–	
$x+3$		–	0	+		+		+	
$x+2$		–		–	0	+		+	
$\dfrac{-x\,(x+3)}{x+2}$		+	0	–	‖	+	0	–	

D'où $\mathcal{S} = [-3\,;-2[\ \cup\ [0\,;+\infty[\ = [-3\,;-2[\ \cup\ \mathbb{R}^+$.

b) $(I_2) : \dfrac{x^2}{x^2+1} < \dfrac{1}{3}$ pas de conditions !!!

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2+1} - \dfrac{1}{3} < 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-(x^2+1)}{3(x^2+1)} < 0$

$(I_2) \Leftrightarrow 3x^2-(x^2+1) < 0$ cf (c) car $3(x^2+1) > 0$

$(I_2) \Leftrightarrow 2x^2-1 < 0$

$(I_2) \Leftrightarrow (x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1) < 0$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$x\sqrt{2}-1$		–		–	0	+	
$x\sqrt{2}+1$		–	0	+		+	
P		+	0	–	0	+	

D'où $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$

c) $(I_3) : \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x-1} \leqslant 0$ condition : $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$(I_3) \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)+4x}{x(x-1)} \leqslant 0$

$(I_3) \Leftrightarrow \dfrac{6x-2}{x(x-1)} \leqslant 0$

x	$-\infty$		0		1/3		1		$+\infty$
$6x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{6x-2}{x(x-1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

D'où $\mathscr{S} =]-\infty\ ;0[\cup \left]\frac{1}{3} ;+\infty\right[$

d) (I_4) : $\dfrac{1}{(x-3)^2} \geqslant 1$ condition : $x \neq 3$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-3)^2} - \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)^2} \geqslant 0$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{1-(x-3)^2}{(x-3)^2} \geqslant 0$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{[1-(x-3)]\ [1+(x-3)]}{(x-3)^2} \geqslant 0$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{(-x+4)(x-2)}{(x-3)^2} \geqslant 0$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Q		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où $\mathscr{S} = [2\ ;4] - \{3\} = [2\ ;3[\cup]3\ ;4]$.