# Exercice n° 1 (équations et inéquations) – 9 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

1. $(E_1) : x^2 + 4x + 4 - 3(x + 2) = 0$

   $(E_1) \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 3(x + 2) = 0$

   $(E_1) \Leftrightarrow (x + 2)(x + 2 - 3) = 0$

   $(E_1) \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$ cf (5)

   $(E_1) \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$ cf (1), (2)

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{-2\,;1} \right\}}$$

2. $(E_2) : (2x + 3)^2 = 16$

   $(E_2) \Leftrightarrow (2x + 3)^2 - 16 = 0$ cf (2)

   $(E_2) \Leftrightarrow (2x + 3 - 16)(2x + 3 + 16) = 0$

   $(E_2) \Leftrightarrow 2x - 13 = 0$ ou $2x + 19 = 0$ cf (5)

   $(E_2) \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{2}$ ou $x = -\dfrac{19}{2}$ cf (1), (2)

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\mathbf{\frac{19}{2}}\,;\mathbf{\frac{13}{2}} \right\}}$$

3. $(E_3) : \dfrac{(x + 1)^2\,(x - 2)}{(2 - x)(3 - 2x)} = 0$ conditions : $\begin{cases} 2 - x \neq 0 \\ 3 - 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq \dfrac{3}{2}$

   $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2\,(x - 2) = 0 \\ x \neq 2 \text{ et } x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ cf (3)

   $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\ x \neq 2 \text{ et } x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ cf (5)

   $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\ x \neq 2 \text{ et } x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ cf (5)

   $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 2 \\ x \neq 2 \text{ et } x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ cf (2), (1)

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{\frac{3}{2}} \right\}}$$

Les deux premières inéquations ne devaient pas subir de factorisation, puisque ce sont deux inéquations (après regroupement) de la forme $ax + b \leqslant 0$ ou $ax + b \geqslant 0$. Elles étaient directement réglées.

4. $(I_1) : 2(1 - x) \leqslant x - 4$

   $(I_1) \Leftrightarrow 2 - 2x \leqslant x - 4$

   $(I_1) \Leftrightarrow -2x - x \leqslant -4 - 2$ cf (b)

   $(I_1) \Leftrightarrow -3x \leqslant -6$

   $(I_1) \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{-6}{-3} = 2$ cf (d)

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbf{[2\,;+\infty[}}$$

5. $(I_2) : (2x + 1) - (x + 1) > 4x$

   $(I_2) \Leftrightarrow 2x - x - 4x > -1 + 1$ cf (b), (a)

   $(I_2) \Leftrightarrow -3x > 0$

   $(I_2) \Leftrightarrow x < \dfrac{0}{-3} = 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty\ ;\ 0[}$$

6. $\dfrac{(x+1)^2\,(x-2)}{(2-x)(3-2x)} \leqslant 0$

   Pour cette inéquation, qui n'est pas d'une forme simple, nous aurons besoin d'un tableau de signes. Attention, le premier facteur est $(x + 1)^2$, c'est-à-dire $(x + 1) \times (x + 1)$, il ne faut donc pas oublier de lui réserver deux lignes dans le tableau !!!

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 3/2 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | | + | \| | + | \| | + | \| | + | |
| $x - 2$ | | – | \| | – | \| | – | 0 | + | |
| $2 - x$ | | + | \| | + | \| | + | 0 | – | |
| $3 - 2x$ | | + | \| | + | 0 | – | \| | – | |
| $\dfrac{(x+1)^2\,(x-2)}{(2-x)(3-2x)}$ | | – | 0 | – | \|\| | + | \|\| | + | |

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[}$$

## Exercice n° 2 (TGV : Triangle à Géométrie Variable…) – 3,5 points

1. a) $\mathcal{P}(x) = (x + 2) + (3x + 1) + (2x + 3) = 6x + 6 = 6(x + 1)$.

   b) Il s'agit de résoudre l'équation $\mathcal{P}(x) = 15$ :

$$\mathcal{P}(x) = 15 \Leftrightarrow 6x + 6 = 15 \Leftrightarrow 6x = 15 - 6 \Leftrightarrow x = \frac{9}{6} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

   La valeur de $x$ pour laquelle le périmètre du triangle vaut 15 est $\dfrac{3}{2}$.

2. Pour que le triangle soit isocèle en A, il faut que AB = AC. Donc :

$$AB = AC \Leftrightarrow x + 2 = 3x + 1 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

   Dans ce cas, $BC = 2 \times \dfrac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4$.

3. Si le triangle était équilatéral, alors il serait en particulier isocèle en A. Ceci ne se produit que lorsque $x = 1/2$, mais dans ce cas, AB = AC = 5/2 et BC = 4, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de valeur de $x$ telle que le triangle ABC soit équilatéral.

## Exercice n° 3 (ciné-maths) – 5 points

1. Le prix payé avec…
   – le tarif A est de : 45 € ;
   – le tarif B est de : $22{,}5 + 1{,}5n$ € ;
   – le tarif C est de : $3{,}8n$ €.

2. Il s'agit ici de résoudre quelques inéquations.
   a) $45 \leqslant 22{,}5 + 1{,}5n \Leftrightarrow n \geqslant 15$
   Donc on a plutôt intérêt à choisir le tarif A au-delà de 15 séances (pour 15 séances, on paye le même prix avec les tarifs A et B ; pour 16 séances, le tarif A est moins cher).
   b) $45 \leqslant 3{,}8n \Leftrightarrow n \geqslant 11{,}84$
   On a plutôt intérêt à choisir le tarif A plutôt que le C au-delà de 12 séances. 11 n'est pas la réponse correcte car $n$ doit être un **entier** supérieur à 11,84. Le premier qui convienne est 12.
   c) $22{,}5 + 1{,}5n \leqslant 3{,}8n \Leftrightarrow n \geqslant 9{,}78$
   A partir de 10 séances, le tarif B est donc plus avantageux que le tarif C.

3. Il est que pour autant de séances dans l'année, c'est le tarif A qui lui sera le plus avantageux. A titre de comparaison, il aurait payé 570  €avec le tarif B et 1387  €avec le tarif C.

## Exercice n° 4 (les astuces servent…) – 2,5 points

1. Il faudrait résoudre le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x \times y = 589 \end{cases}$$

2. Justine a raison, car : $50 = 25 - a + 25 + a$. On peut donc écrire $x = 25 - a$ et $y = 25 + a$, de sorte que l'on ait bien $x + y = 50$.

3. On par de l'équation $x \times y = 589$ :
$$x \times y = 589 \Leftrightarrow (25 - a)(25 + a) = 589 \Leftrightarrow 625 - a^2 = 589 \Leftrightarrow a^2 = 36.$$

4. $a^2 = 36 \Leftrightarrow a = -6$ ou $a = 6$. Cette équation a deux solutions, nous avons donc deux cas à distinguer :

| $a = -6$ | $a = 6$ |
|---|---|
| $x = 25 - (-6) = 31$<br>$y = 25 + (-6) = 19$ | $x = 25 - (6) = 19$<br>$y = 25 + (6) = 31$ |

Il y a donc deux « couples » solutions : soit $x = 31$ et $y = 19$, soit $x = 19$ et $y = 31$, ce que l'on peut éventuellement noter sous la forme :
$$\mathscr{S} = \{(19 ; 31) ; (31 ; 19)\}.$$