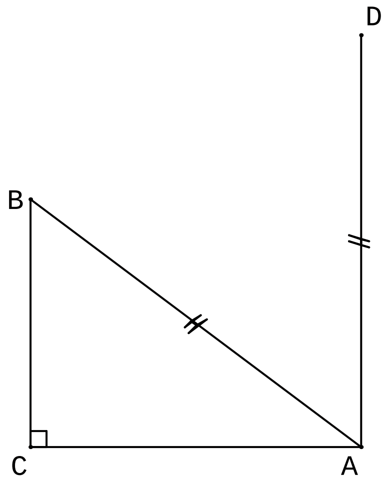
Exercice n° 1 (autour du théorème de Pythagore, version B) – 6 points

Soit ABC un triangle rectangle en C. On note a = BC, b = AC et c = AB. On construit le rectangle CADE tel que AD = c et B $\in$ [CE]. La bissectrice de $\widehat{\text{DAB}}$ coupe [DE] en F.

1. Recopier et compléter le début de figure ci-contre.
2. Comment s'écrit l'égalité de Pythagore en utilisant a, b et c ? On se propose dans les questions suivantes de démontrer cette égalité.
3. Montrer que les triangles ABF et ADF sont isométriques. Que mesure alors $\widehat{\text{ABF}}$?
4. En déduire que les triangles ABC et BFE sont semblables.
5. Exprimer $\tan(\widehat{\text{FBE}})$, $\tan(\widehat{\text{BAC}})$, $\sin(\widehat{\text{FBE}})$ et $\sin(\widehat{\text{BAC}})$ en fonction de a, b, c et x = EF.
6. Puisque $\tan(\widehat{\text{FBE}}) = \tan(\widehat{\text{BAC}})$, exprimer x en fonction de a, b et c. En faire de même avec les deux sinus, et retrouver[1] ainsi le résultat exprimé à la question 2.

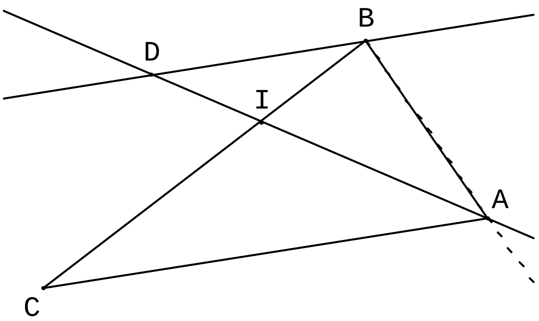


Exercice n° 2 (dans un triangle…) – 6 points

Soit ABC un triangle quelconque. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [AC]. Soit H le pied de la hauteur issue de C. Le but de cet exercice est de démontrer que : $\widehat{\text{BCA}} = \widehat{\text{IHJ}}$.

1. Faire une figure.
2. Démontrez que H appartient au cercle de diamètre [BC]. En déduire que BC = 2 $\times$ IH.
3. Par une méthode semblable, démontrez que AC = 2 $\times$ JH.
4. Démontrez que AB = 2 $\times$ IJ.
5. Déduire des 3 résultats précédents que les triangles ABC et IJH sont semblables.
6. Quel est le sommet homologue de C ? En déduire que $\widehat{\text{BCA}} = \widehat{\text{IHJ}}$.

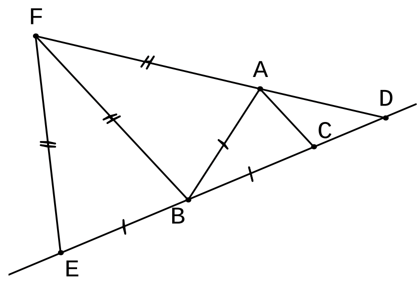
Exercice n° 3 (dans un autre triangle…) – 3 points



ABC est un triangle quelconque. La bissectrice de $\widehat{\text{A}}$ coupe (BC) en I, et la parallèle à (AC) passant par B coupe (AI) en D.

1. Montrer que le triangle ABD est isocèle.
2. Montrer que les triangles IAC et IDB sont semblables.
3. Déduire des deux questions précédentes que $\dfrac{\text{IB}}{\text{IC}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$.

Exercice n° 4 (dans un dernier triangle) – 5 points



Sur la figure ci-contre, AF = BF = EF = 4 et AB = BE = BC = 2.

1. Montrer que les triangles FAB et BAC sont semblables et en déduire AC.
2. Montrer que (AC) // (BF), et en déduire CD.
3. Calculer alors ED.

[1] : On rappelle que si $x = y$ ***et*** $x = z$, alors $y = z$.