Exercice 1 (nombres) - 4 points

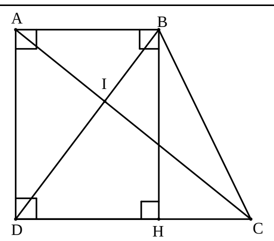
1. Compléter le tableau suivant :

Nombre	Diviseurs 2	3	5	7
84	**X**	**X**		**X**
120	X	X	X	
270	X	X	X	
243		X		
280	X		X	X
840	X	X	X	X

2. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$; $243 = 3^5$
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$; $280 = 2^3 \times 5 \times 7$
$270 = 2 \times 3^3 \times 5$; $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

3. Rendre alors les fractions suivantes irréductibles :
$$\frac{84}{120} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}\ ;$$
$$\frac{270}{243} = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{3^5} = \frac{2 \times 5}{3^2} = \frac{10}{9}\ ;$$
$$\frac{280}{840} = \frac{2^3 \times 5 \times 7}{2^3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{1}{3}$$

Exercice 2 (QCM) - 5 points

Si $a \neq 0$ et $a < b$, alors :	☐ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	☑ $-a > -b$	☐ $a^2 < b^2$	☑ $a - 5 < b - 4$
L'inéquation $\frac{x-4}{x-1} \geqslant 0$ a pour ensemble solutions :	☐ $\{1\ ;\ 4\}$	☑ $]-\infty\ ;\ 1[\ \cup\ [4\ ;\ +\infty[$	☐ $\varnothing$	☐ $[4\ ;\ +\infty[$
Si $f(x) = -x^2 + 2x - \frac{1}{20}$ (f étant définie sur $\mathbb{R}$), alors :	☑ $f(x) = -(x-1)^2 + \frac{19}{20}$	☐ le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 1	☑ le maximum de f est atteint pour $x = 1$	☐ la courbe de f coupe la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{10}$ en deux points d'abscisses : $-0{,}25$ et $0{,}25$
Si $f(x) = 2x + 3$, alors :	☐ $f(x) = 0$ a pour solution $x = -5$	☑ $f(2) = 7$	☑ $f(f(2)) = 17$	☐ $f\left(\frac{2}{3}\right) = 6$
 **AB = 6 ; AD = 8 ; DC = 10**	☐ AC = 16	☑ $\frac{IA}{IB} = \frac{IC}{ID}$	☑ BD = CD	☐ $\sin \widehat{ADB} = 0{,}8$
Si $\lvert x \rvert \leqslant 4$, alors :	☐ $x \in\ ]-\infty\ ;\ -4]\ \cup\ [4\ ;\ +\infty[$	☐ $x \in [0\ ;\ 4]$	☐ $x \in [-4\ ;\ 0]$	☑ $x \in [-4\ ;\ 4]$

Quelques justifications :

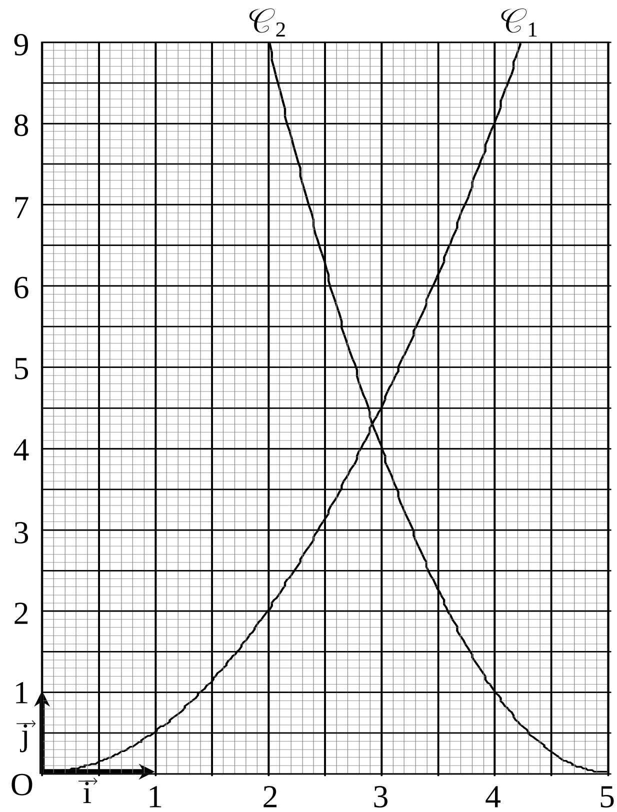
- Première ligne : Les cases 1 et 3 sont fausses, il suffit de prendre $a = -2$ et $b = 1$ pour s'en convaincre. La case 2 est juste car lorsqu'on multiplie n'importe quelle inégalité par -1, le sens en est changé. La dernière case est vraie car $a - 5 < a - 4$ (facile à voir), et comme $a < b$, on a finalement $a - 4 < b - 4$, donc on a bien $a - 5 < b - 4$.
- Deuxième ligne : Il suffisait de faire un tableau de signes pour trouver la bonne réponse !

- <u>Troisième ligne</u> : La première case est vraie car si l'on développe l'expression qu'elle contient, on retrouve l'expression de $f(x)$ donnée. Cette réponse nous permet de voir que le maximum est atteint pour $x = 1$ et vaut 19/20, donc la deuxième case est fausse et la troisième est juste. Pour la dernière, il suffit de factoriser $f(x) - 2x + 1/10$ pour voir que la bonne réponse contiendrait une racine, et est donc différente de ±0,25.
- <u>Quatrième ligne</u> : $f(-5) = -7$, donc la première case est fausse. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3} \neq 6$ donc la dernière case est fausse. Le calcul assure que les autres cases sont justes.
- <u>Cinquième ligne</u> : Le théorème de Pythagore donne AC ≃ 12,8, donc la première case est fausse. La seconde est juste, en appliquant le théorème de Thalès **puis** le produit en croix. Le théorème de Pythagore donne BD = 10, donc on a bien BD = CD. Enfin, $\sin \widehat{ADB} = \frac{AB}{BD} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
- <u>Sixième ligne</u> : $|x| \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x \leqslant 4 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x \geqslant -4 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 4] \\ x \in [-4, 0] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4 ; 4]$.

Exercice 3 (fonctions de référence) - 7 points

~ PARTIE I ~

1. Ces deux fonctions sont définies sur I = [0 ; 5] car M ∈ [AB].
2. $\mathscr{P}_1(x) = AM + AN + MN = 2x + x\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})\,x$. Cette fonction est *linéaire*.
3. $\mathscr{P}_2(x) = 4 \times MB = 4 \times (5 - x) = -4x + 20$. Cette fonction est *affine*.
4. $\mathscr{P}_1(x) = \mathscr{P}_2(x) \Leftrightarrow (2 + \sqrt{2})\,x = -4x + 20$
   $\Leftrightarrow (6 + \sqrt{2})\,x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{6 + \sqrt{2}}$.
   C'est donc la valeur de x pour laquelle les deux périmètres sont égaux.



~ PARTIE II ~

1. $\mathscr{A}_1(x) = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{x^2}{2}$.
2. $\mathscr{A}_2(x) = BM^2 = (5 - x)^2$.
3. Voir ci-contre (il fallait faire un tableau de valeurs pour $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ avec x variant de 0,5 en 0,5 entre 0 et 5).
4. Graphiquement, la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales est environ égale à 2,9. Le calcul donnerait comme solution $x = 5\,(2 - \sqrt{2})$.

~ PARTIE III ~

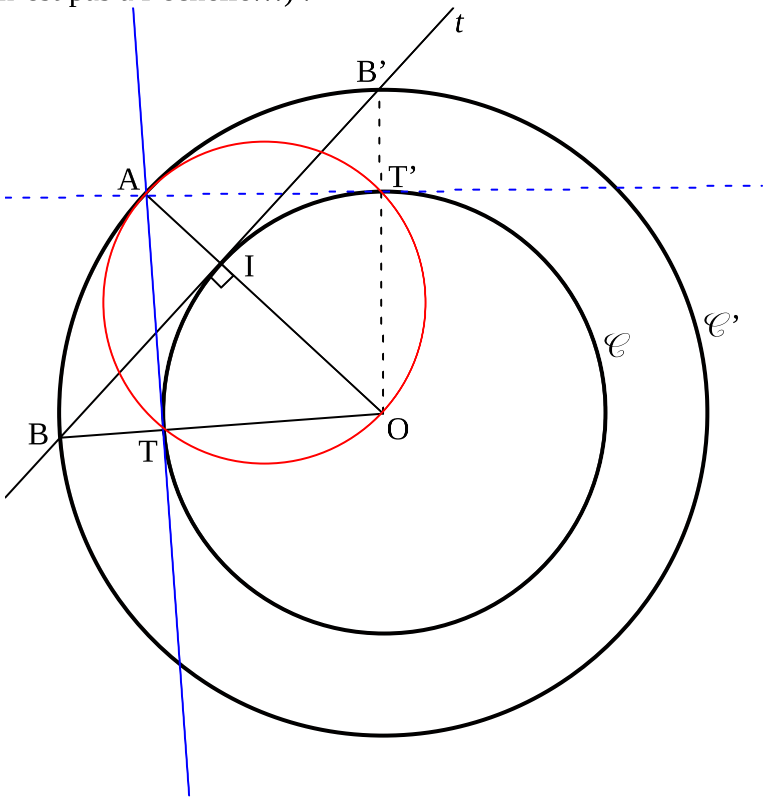
Si une telle valeur existait, elle serait solution de l'équation $\mathscr{A}_2(x) = 2 \times \mathscr{A}_1(x)$.
Or $\mathscr{A}_2(x) = 2 \times \mathscr{A}_1(x) \Leftrightarrow (5 - x)^2 = x^2 \Leftrightarrow 25 - 10x + x^2 = x^2 \Leftrightarrow 25 = 10x \Leftrightarrow x = \frac{25}{10} = 2{,}5$.

On en déduit que lorsque $x = 2{,}5$, l'aire du carré est le double de celle de l'aire du triangle (vu la construction de la figure, ce résultat était « géométriquement » trivial !).

Exercice 4 (géométrie) - 4 points

On considère un cercle 𝒞' de centre O et de rayon 5 cm, un point A sur ce cercle et un point I sur le segment [OA]. Soit 𝒞 le cercle de centre O passant par I. On nomme alors *t* la tangente à 𝒞 en I. *t* coupe alors 𝒞' en deux points : B et B'. Enfin, le segment [OB] coupe le cercle 𝒞 en T.

1. Voici la figure (elle n'est pas à l'échelle…) :



2. Puisque A et B sont deux points de 𝒞', on a OA = OB. De même, T et I étant deux points de 𝒞, on a OI = OT. Enfin, $\widehat{BOI} = \widehat{AOT}$ car c'est le même angle. Donc d'après le critère n° 2 d'isométrie (« côté – angle – côté »), les triangles OBI et OAT sont isométriques.
   On en déduit que $\widehat{OTA} = \widehat{OIB} = 90°$, donc (AT) ⊥ (OT), et puisque T ∈ 𝒞, (AT) est la tangente à 𝒞 au point T.
3. Voir la figure…
4. Précisons que nous montrons de la même manière qu'à la question 2 que (AT') est la tangente à 𝒞 au point T'. On en déduit que les deux triangles ATO et AT'O sont rectangles en T et T'. D'après un théorème du cours, le cercle circonscrit à ATO est de diamètre l'hypoténuse [AO]. Ce cercle contient donc les points A, O et T. De même, le cercle circonscrit à AT'O est de diamètre l'hypoténuse [AO], donc les points A, O, T' sont sur le même cercle que précédemment. Conclusion : les points A, T, O et T' sont sur un même cercle, celui de diamètre [AO] (en rouge sur la figure).