ATTENTION au soin, à l'orthographe, à la rédaction, et à la précision !!!

Exercice n° 1 (autour du nombre d'or) − 8 points

1. On souhaite résoudre dans ℝ l'équation (E) : $\dfrac{1}{1+x} = x$.

   a) On utilise le produit croix : (E) $\Leftrightarrow x\,(1+x) = 1$
   (E) $\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ cf (2)

   b) (E) $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

   (E) $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$. La constante c recherchée vaut donc 5/4.

   c) (E) $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\dfrac{5}{4}}\right)^2 = 0$

   (E) $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{5}{4}}\right)\left(x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{5}{4}}\right) = 0$

   (E) $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

   Les constantes a et b valent donc respectivement $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   d) L'équation (E) admet donc deux solutions qui sont $-a$ et $-b$, c'est-à-dire :

   $$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \,;\, \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right\}$$

a) 1 pt
b) 1 pt (+ 1 pt pour la constante)
c) 1 pt (+ 1 pt pour les constantes)
d) 1 pt

2. On alors, en utilisant plusieurs fois l'équation (E) avec $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}}}} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

φ est donc le nombre d'or…

2 pts (dont 1 pt si le résultat a été réduit)

Exercice n° 2 – … points

♦ : $x^2 - 10x + 25 = 0$ ♦ $\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$ ♦ $\Leftrightarrow x - 5 = 0$ cf (5) ♦ $\Leftrightarrow x = 5$ cf (1) **$\mathcal{S} = \{5\}$**	♥ : $x^2 - 10x + 24 = 0$ ♥ $\Leftrightarrow (x-5)^2 - 1 = 0$ ♥ $\Leftrightarrow (x-5-1)(x-5+1) = 0$ ♥ $\Leftrightarrow (x-6)(x-4) = 0$ ♥ $\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 4$ cf (5), (1) **$\mathcal{S} = \{4 ; 6\}$**
♣ : $x^2 - 10x + 23 = 0$ ♣ $\Leftrightarrow (x-5)^2 - 2 = 0$ ♣ $\Leftrightarrow (x-5-\sqrt{2})(x-5+\sqrt{2}) = 0$ ♣ $\Leftrightarrow x = 5+\sqrt{2}$ ou $x = 5-\sqrt{2}$ cf (5), (1) **$\mathcal{S} = \{5-\sqrt{2} ; 5+\sqrt{2}\}$**	♠ : $x^2 - 10x + 21 = 0$ ♠ $\Leftrightarrow (x-5)^2 - 4 = 0$ ♠ $\Leftrightarrow (x-5-2)(x-5+2) = 0$ ♠ $\Leftrightarrow (x-7)(x-3) = 0$ cf (5), (1) ♠ $\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 3$ **$\mathcal{S} = \{3 ; 7\}$**

Passons maintenant à l'équation (E) :
(E) $\Leftrightarrow (x-5)^2 - 2025 = 0$
(E) $\Leftrightarrow (x-5-45)(x-5+45) = 0$
(E) $\Leftrightarrow x = 50$ ou $x = -40$ cf (5), (1)
d'où $\mathcal{S} = \{-40 ; 50\}$.

1,5 pt par équation (dont 0,5 pt pour l'ensemble solution) – 6 équations

Résolvons enfin le petit problème posé :
Soit n le nombre de gagnants à la loterie. On commence par traduire l'énoncé :

- « Les autres gagnants » : puisqu'il y a en a n au départ et que 10 ont perdu leur ticket, ces autres gagnants seront au nombre de $n - 10$.
- « se voient attribuer 4 € de plus que prévu » : ce qui était prévu par gagnant était $\dfrac{1200}{n}$. Chaque gagnant n'ayant pas perdu son ticket recevant 4 € de plus, ils toucheront chacun $\dfrac{1200}{n} + 4$.

Rappelons que la somme reçue par chaque gagnant sera alors $\dfrac{1200}{n-10}$, puisque l'intégralité de la somme est redistribuée aux gagnants restants.

Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation (€) : $\dfrac{1200}{n-10} = \dfrac{1200}{n} + 4$.

(€) $\Leftrightarrow \dfrac{1200\,n}{n\,(n-10)} = \dfrac{1200\,(n-10)}{n\,(n-10)} + \dfrac{4\,n\,(n-10)}{n\,(n-10)}$
(€) $\Leftrightarrow 1200n = 1200\,(n-10) + 4\,n\,(n-10)$ cf (3)
(€) $\Leftrightarrow 1200n = 1200n - 12000 + 4n^2 - 40n$
(€) $\Leftrightarrow 4n^2 - 40n - 12000 = 0$ cf (2)
(€) $\Leftrightarrow n^2 - 10n - 3000 = 0$ cf (4) (simplification par 4)
(€) $\Leftrightarrow (n-5)^2 - 5^2 - 3000 = 0$
(€) $\Leftrightarrow (n-5)^2 - 3025 = 0$
(€) $\Leftrightarrow (n-5-55)(n-5+55) = 0$
(€) $\Leftrightarrow (n-60)(n+50) = 0$
(€) $\Leftrightarrow n = 60$ ou $n = -50$ cf (5), (1)

D'où, comme n ne peut être négatif, $\mathcal{S} = \{60\}$, et on en déduit qu'il y avait 50 gagnants à cette loterie. Chaque gagnant a alors touché $\dfrac{1200}{60} + 4 = 20 + 4 = 24$ €. On peut vérifier que $\dfrac{1200}{60-10} = \dfrac{1200}{50} = 24$ € (heureusement, on trouve le même résultat !!!)

Exercice n° 3 (une question d'âges) – 3 points

Soit n l'âge du professeur. Alors « prenez mon âge, ajoutez-y 51 et divisez le tout par 3 » sera traduit mathématiquement sous la forme $\frac{n+51}{3}$. De même, « vous trouverez ainsi l'âge que j'aurai l'an prochain » sera traduit par $n + 1$.

Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation (A) : $\frac{n+51}{3} = n + 1$.

(A) $\Leftrightarrow \frac{n+51}{3} = \frac{3n+3}{3}$

(A) $\Leftrightarrow n + 51 = 3n + 3$ cf (3)

(A) $\Leftrightarrow 51 - 3 = 3n - n$ cf (2)

(A) $\Leftrightarrow 48 = 2n$

(A) $\Leftrightarrow n = \frac{48}{2} = 24$ cf (4)

> * 1,5 pt pour la mise en équation
> * 1,5 pt pour la résolution (dont 0,5 pt pour l'ensemble solution)

Le professeur est donc actuellement âgé de 24 ans.