ATTENTION au soin, à l'orthographe, à la rédaction, et à la précision !!!

Exercice n° 1 − 6 points

A l'extérieur d'un triangle ABC, on construit les carrés ABDE et ACFG. M est le milieu de [BC], et A' le symétrique de A par rapport à M.

1. Faire une figure avec AB = 5 cm, AC = 7 cm, BC = 8 cm.
2. Que peut-on dire des segments [EC] et [BG] (utiliser des triangles isométriques) ?
3. Montrer que les triangles EAG et ABA' sont isométriques (indication : utiliser « c – a – c »).
4. En déduire que EG = 2AM.
5. On appelle H le pied de la hauteur de ABC issue de A, et N le milieu de [EG].
   a) Compléter la figure. Que peut-on dire des triangles EAN et BAM ?
   b) En déduire que $\widehat{NAE} + \widehat{EAB} + \widehat{BAH} = 180°$. Que vérifient alors les points A, N, H ?

Exercice n° 2 − 3 points

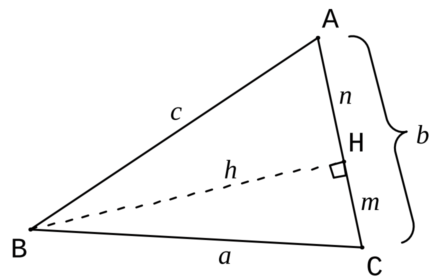
Soient $\mathscr{C}_1$ un cercle de centre O, A un point extérieur à ce cercle et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O passant par A. La droite (OA) coupe $\mathscr{C}_1$ en I. La perpendiculaire à (OA) en I coupe $\mathscr{C}_2$ en H. La droite (OH) coupe $\mathscr{C}_1$ en K. Faire une figure.

1. Démontrer que les triangles HIO et AKO sont isométriques.
2. Que représente la droite (AK) pour le cercle $\mathscr{C}_1$? Justifier.
3. Justifier aussi que les droites (IK) et (AH) sont parallèles.

Exercice n° 3 (réinvestissement d'outils géométriques) – 10 points

Soit ABC un triangle quelconque.

– Partie I –



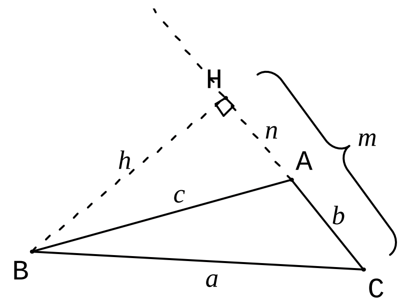
Dans cette partie, on suppose que $\widehat{A}$ est aigu. On voudrait établir l'égalité

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}}.$$

Tout triangle du plan possède au moins deux angles aigus, on peut donc supposer que l'angle $\widehat{C}$ l'est aussi. Soit alors H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Puisque $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont aigus, le point H appartient au segment [AC].

Justifier successivement les égalités suivantes : $a^2 = m^2 + h^2$; $a^2 = b^2 - 2bn + n^2 + h^2$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$, puis conclure.

– Partie II –



Dans cette partie, on suppose que $\widehat{A}$ est obtus. On voudrait établir l'égalité

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \times AB \times AC \times \cos(180° - \widehat{A})}.$$

L'angle $\widehat{A}$ étant obtus, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus. Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. A est un point du segment [CH].

Avec les notations ci-contre, et en utilisant une méthode analogue à la partie I (en adaptant évidemment les notations), démontrer l'égalité ci-dessus.

Questions bonus :

1. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant si besoin à deux chiffres après la virgule :

α	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
cos(α)										
180° – α										
cos(180° – α)										

2. Que peut-on conjecturer ? On suppose par la suite que cette conjecture est vérifiée.
3. En utilisant ce résultat, à quel autre relation est égale celle démontrée dans la partie II ?